

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE 3^e CYCLE

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE

PAR

Sylviane GENTIL

Maître ès-Sciences

TITRE

Etude comparative de diverses méthodes statistiques
d'identification de systèmes dynamiques

Soutenue le 7 Juillet 1972 devant la Commission d'Examen

JURY

MM. R. PAUTHENET

Président

R. PERRET
R. MEZENECV
C. FOULARD

} *Examineurs*

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE 3^e CYCLE

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE

PAR

Sylviane GENTIL

Maître ès-Sciences

TITRE

Etude comparative de diverses méthodes statistiques
d'identification de systèmes dynamiques

Soutenue le 7 Juillet 1972 devant la Commission d'Examen

JURY

MM. R. PAUTHENET

Président

R. PERRET
R. MEZENCEV
C. FOULARD

} *Examineurs*

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrometallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSENEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphillographie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique

MM.	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique Industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique Industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques Appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Eile	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41533909_0034

MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JENTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
	MICOUD Max	Maladies Infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHILIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	PIERY Yvette	Biologie animale

MM.	RACHAIL Michel	Médecine Interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine Interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNÝ François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 Mai 1972

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur PAUTHENET qui m'a fait l'honneur de présider le Jury de cette Thèse.

Je sais gré à Monsieur le Professeur MEZENCEV d'avoir accepté de faire partie de mon Jury.

Toute ma gratitude s'adresse à Monsieur le Professeur PERRET qui a bien voulu m'accueillir dans son Laboratoire et dont l'enseignement m'a permis de mener à bien cette étude.

Je voudrais remercier très chaleureusement Monsieur FOULARD qui a dirigé mon travail. Il a été pour moi un guide efficace et je lui dois beaucoup pour les conseils et les encouragements qu'il a su me prodiguer.

Merci enfin à tous mes Collègues du Laboratoire dont la camaraderie m'a été précieuse au cours des mois passés en commun.

It is more fun to dream up new methods than to work with somebody else's scheme. Nevertheless, for a person engaged in application it would be highly desirable to have comparisons available.

K.J. ÅSTRÖM - P. EYKOPF.

(Symposium I.F.A.C. PRAGUE - 1970)

NOTATIONS

A	: Matrice
$\{a_{ij}\}$	: Elément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A
A'	: Transposée de la matrice A
$ A $	: Déterminant de la matrice A
$\underline{\theta}$	: Vecteur
$p\{x\}$	: Densité de probabilité de la variable aléatoire x
E.M. $\{x\}$	: Espérance mathématique de la variable aléatoire x
$\Gamma_{xx}(\tau)$	: Autocorrélation du signal x
$\Gamma_{xy}(\tau)$	: Intercorrélation des signaux x et y
$\ln(x)$	: Logarithme népérien de x
$\forall$	: Quel que soit
$\exists$	: Il existe
(3)	: Référence n° 3
$(3-7)$	: Equation 7 du Chapitre 3
$(3-1-1)$	: Paragraphe 1-1 du chapitre 3

P L A N

INTRODUCTION

CHAPITRE 1 : RAPPELS SUR L'IDENTIFICATION

- 1-1 : Choix du modèle et du critère.
 - 1-1-1. Classes de modèles.
 - 1-1-2. Equivalence : les critères.
- 1-11 : Les méthodes.
 - 1-11-1. La programmation non linéaire.
 - 1-11-2. Les méthodes statistiques.

CHAPITRE 2 : ETUDE DU MODELE

- 2-1 : Le modèle choisi.
 - 2-1-1. Justification du choix.
 - 2-1-2. Analyse du modèle choisi.
- 2-11 : Changement de représentation.
 - 2-11-1. Fonction de transfert échantillonnée.
 - 2-11-2. Séquence de pondération.
 - 2-11-3. Modèle d'état discret.
 - 2-11-4. Modèle d'état continu.
 - 2-11-5. Matrices de transfert.
 - 2-11-6. Réponse impulsionnelle. Séquence de pondération.
- 2-111 : Problème d'échantillonnage.

CHAPITRE 3 : LES MOINDRES CARRES. LES MOINDRES CARRES GENERALISES

- 3-1 : Les moindres carrés.
 - 3-1-1. Le critère et la solution.
 - 3-1-2. Les caractéristiques de l'estimateur.
 - 3-1-3. Comparaison avec les méthodes de corrélation.
 - 3-1-4. Interprétation géométrique.
 - 3-1-5. Caractérisation.

3-II : Le Biais de l'estimateur - Les solutions proposées.

3-II-1. Estimateur de MARKOV.

3-II-2. Méthode de K. STEIGLITZ et L.E. Mc BRIDE.

3-II-3. Méthode de CLARKE : moindres carrés généralisés.

3-III : Résultats expérimentaux.

3-III-1. Programmes de simulation.

3-III-2. Test d'arrêt du filtrage.

3-III-3. Résultats de caractérisation.

3-III-4. Etude expérimentale du filtre. Comparaison des moindres carrés et des moindres carrés généralisés.

CHAPITRE 4 : LA MATRICE INSTRUMENTALE

4-I : Etude de la méthode.

4-I-1. Son principe.

4-I-2. Une classe de matrices instrumentales.

4-I-3. Quelques exemples de matrices instrumentales.

4-I-4. Choix de la matrice instrumentale.

4-I-5. Comparaison avec les méthodes de corrélation.

4-I-6. Estimation de la variance des résidus.

4-I-7. Corrélation des paramètres.

4-II : Résultats expérimentaux.

4-II-1. Organisation du programme.

4-II-2. Résultats de caractérisation.

4-II-3. Détermination du retard de la matrice instrumentale.

CHAPITRE 5 : LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

5-I : Etude de la méthode.

5-I-1. L'erreur de prédiction du modèle.

5-I-2. La fonction de vraisemblance ; le critère.

5-1-3. Etude de la solution numérique.

5-1-4. Initialisation des calculs.

5-1-5. Propriétés de l'estimateur.

5-11 : Résultats expérimentaux.

5-11-1. Organisation du programme.

5-11-2. Résultats de caractérisation.

5-11-3. Première estimation.

5-11-4. Influence de la nature du bruit.

5-11-5. Influence du nombre de paramètres relatifs
au bruit.

5-11-6. Influence des conditions initiales.

CHAPITRE 6 : COMPARAISON DES METHODES ET DES RESULTATS.

6-1 : Comparaison des méthodes.

6-1-1. Analyse des modèles.

6-1-2. Comparaison des méthodes de calcul.

6-1-3. Détermination des caractéristiques du bruit.

6-1-4. Facilités de caractérisation.

6-1-5. Comparaison des programmes et des temps de
calcul.

6-11 : Comparaison des résultats.

6-11-1. Précision numérique.

6-11-2. Cas d'un résidu blanc.

6-11-3. Influence du niveau de bruit.

6-11-4. Influence d'une bonne caractérisation.

6-11-5. Influence du nombre de données.

6-11-6. Identification de la valeur moyenne du bruit.
Influence de la nature du bruit.

6-11-7. Etude du gain statique.

6-11-8. Effet de lissage.

CHAPITRE 7 : INFLUENCE DE L'ENTREE

7-1 : Utilisation de bruit à l'entrée.

7-II : Comparaison des performances de séquences binaires pseudo-aléatoires et d'échelons utilisés pour l'identification.

7-II-1. Difficultés posées par le modèle.

7-II-2. Comparaison des deux entrées vis-à-vis de la caractérisation.

CHAPITRE 8 : IDENTIFICATION EN TEMPS REEL

8-I : Les moindres carrés en temps réel.

8-II : Le filtre de KALMAN. Les moindres carrés généralisés en temps réel.

8-II-1. Rappels sur le filtre de KALMAN.

8-II-2. Application à l'identification.

8-II-3. Distance de structure.

8-II-4. Cas de bruit corrélié.

8-III : La matrice instrumentale en temps réel.

8-IV : Etude des résidus en temps réel.

8-V : Résultats pratiques.

8-V-1. Considérations numériques.

8-V-2. Résultats expérimentaux.

CHAPITRE 9 : IDENTIFICATION DE PROCESUS PILOTES

9-I : Identification d'une machine à papier.

9-I-1. Connaissances a priori.

9-I-2. Modèle du maximum de vraisemblance.

9-I-3. Modèle de la matrice instrumentale.

9-I-4. Modèle des moindres carrés généralisés.

9-I-5. Comparaison des modèles.

9-II : Identification d'une colonne à distiller pilote.

9-II-1. Entrée : séquence binaire pseudo-aléatoire.

9-II-2. Entrée : échelon.

CONCLUSION

INTRODUCTION

L'automatique, comme toutes les sciences d'ailleurs, a commencé de façon très empirique. Il s'agissait dans la plupart des cas de boucler un système par l'intermédiaire d'un correcteur de façon à obtenir une sortie qui soit le plus rapidement possible identique à la consigne, tout en assurant un fonctionnement stable au système. L'analyse harmonique a été un outil puissant pour ce genre d'études, car on sait très bien étudier les fonctions de transfert dans le plan de Bode, et les corriger. Les correcteurs classiques que sont les P.I.D. (action proportionnelle au signal d'erreur - consigne moins sortie obtenue - , à son intégrale et à sa dérivée) sont encore très souvent utilisés dans l'industrie et leurs paramètres, malgré l'existence de certaines règles, sont la plupart du temps choisis de façon expérimentale.

Mais, d'une part, les automaticiens s'intéressent à des systèmes de plus en plus complexes et variés (allant d'un steam-cracking de pétrochimie à une réaction enzymatique par exemple) et donc difficiles à manoeuvrer, d'autre part l'essor formidable de la théorie de la commande dans l'après guerre nous a rendus de plus en plus exigeants. On cherche maintenant non seulement à obliger le système à suivre une consigne le plus rapidement possible, mais encore à calculer des commandes qui soient optimales au sens d'un critère choisi par l'utilisateur. Ce critère essaie de tenir compte de l'identité entre sortie et consigne, mais aussi de l'énergie dépensée et de la sécurité vis-à-vis des contraintes. Remarquons qu'en fait on met en oeuvre surtout des commandes sous-optimales, moins performantes mais plus aisément maniables.

Pour calculer ces commandes, on a besoin de connaître les équations qui rendent compte du fonctionnement du procédé, équations statiques ou dynamiques selon les buts de cette commande. Il apparaît donc la nécessité de mettre au point des techniques qui permettent de trouver de telles équations, c'est ce qu'on appelle identifier le procédé. Cette préoccupation a été celle de nombreux automaticiens dans les dernières années et maintenant on peut dire que l'identification tient une part aussi grande que la commande en automatique. On peut même dire que cette nouvelle science s'est développée si vite qu'elle en paraît quelque peu anarchique. Les techniques d'identification proposées sont en effet nombreuses, et souvent basées sur des concepts très différents. Elles semblent à première vue n'avoir guère de points communs. D'un autre côté, on ne peut qu'être frappé par le fait que des idées de bases distinctes aboutissent parfois à des algorithmes pratiquement identiques. Disons qu'il est difficile dans l'état actuel des choses d'avoir une idée d'ensemble nette de la situation. Ceci s'explique à notre avis de la façon suivante : contrairement à la commande, qui est un problème essentiellement mathématique de minimisation d'un critère (avec contraintes en général), l'identification est avant tout un problème de physicien et d'ingénieur, sur lequel l'expérimentation aura une influence prépondérante.

Nous l'avons dit, identifier un système c'est trouver un modèle mathématique qui représente au mieux son fonctionnement dans certaines conditions. L'importance de l'environnement est primordiale. Les réactions du système en dépendent, et donc son modèle. On peut citer l'exemple du modèle mécanique classique $F = M \gamma$ qui n'est plus valable au-delà d'une certaine gamme de vitesse. Un modèle est d'autant plus performant qu'il rend compte du fonctionnement du procédé dans des conditions plus diverses. Mais pour être exploitable (le modèle est rarement un but en soi mais plutôt un outil qui doit servir à des études ultérieures), il ne doit pas être trop complexe. L'automaticien devra constamment garder ces deux idées en tête, et choisir le compromis le plus acceptable.

Si l'on peut écrire les équations réglissant le fonctionnement du système grâce aux lois physiques auxquelles il obéit, il ne reste plus qu'à déterminer expérimentalement la valeur numérique des coefficients ; on dira qu'on a un *modèle de connaissance*, et c'est bien là, évidemment, la situation la plus souhaitable. Mais hélas, la plupart des procédés industriels sont extrêmement complexes et il faut bien avouer dans la majorité des cas notre impuissance à écrire de telles équations, soit que les calculs soient inextricables, soit que les phénomènes physiques eux-mêmes soient mal connus. Il faut donc se contenter de représenter le système par des équations mathématiques sans lien apparent avec la réalité physique ; on dira alors qu'on a un *modèle de représentation* ; on parle à ce propos de "boîte noire". Fort heureusement dans la plupart des cas, la "boîte" n'est pas vraiment "noire", mais plutôt "grise", car on a tout de même une certaine idée de son contenu.

Nous nous sommes personnellement intéressés aux problèmes de l'identification dynamique et nous nous sommes proposés de comparer entre elles plusieurs méthodes, tant sur le plan théorique qu'expérimental. Un premier chapitre nous permettra de donner les principes généraux des méthodes rencontrées le plus souvent dans la littérature, afin que notre travail puisse être placé dans un contexte assez large ; nous expliquerons alors le choix des méthodes que nous allons comparer. Le deuxième chapitre expliquera le choix que nous avons fait pour le modèle et étudiera celui-ci en détail. Nous verrons comment passer d'un type de modèle à l'autre. Nous étudierons ensuite chacune des quatre méthodes que nous avons choisies de comparer. Le troisième chapitre sera consacré à l'étude des MOINDRES CARRES, méthode déjà ancienne et classique. Nous verrons que si elle a l'avantage de la simplicité, elle a le grave inconvénient de donner une erreur systématique et parfois grossière ; nous exposerons donc rapidement quelles ont été les solutions proposées pour améliorer ses performances et pourquoi parmi ces solutions nous avons choisi les MOINDRES CARRES GENERALISES de D.W. CLARKE (décember 1966) ; nous présenterons quelques résultats expérimentaux

pour éclairer ces problèmes. Dans le quatrième chapitre, nous exposerons la méthode de LA MATRICE INSTRUMENTALE A OBSERVATIONS RETARDEES proposée par G. BANON en janvier 1971 ; nous verrons comment nous avons été amenés à modifier légèrement cette méthode et quelques résultats expérimentaux montreront l'amélioration ainsi obtenue. Un cinquième chapitre sera consacré à la méthode du MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE proposée par K.J. ÅSTRÖM et T.S. BOHLIN en 1965. Le sixième chapitre comparera les résultats obtenus avec les quatre méthodes et nous permettra de tirer quelques conclusions. Nous n'avons pas voulu traiter de l'identification sans parler de l'influence de l'entrée sur les résultats ; c'est le but du septième chapitre. Le huitième chapitre montrera comment adapter les méthodes à une identification menée en temps réel - c'est-à-dire dont le modèle est élaboré au fur et à mesure qu'arrivent des données prises sur le système. Enfin, nous montrerons dans le neuvième chapitre les applications que nous avons faites sur des procédés pilotes. Nous espérons que les nombreux résultats présentés permettront de bien éclaircir les divers problèmes soulevés.

CHAPITRE I

RAPPELS SUR L'IDENTIFICATION

Nous avons dans l'introduction posé le problème de l'identification. Voici la définition donnée par ZADEH en 1962, définition qui nous semble excellente : "L'identification est la détermination, basée sur la connaissance des entrées et des sorties d'un procédé, d'un modèle, appartenant à une classe spécifiée, équivalent au procédé". Il ne s'agit donc pas de déterminer un modèle identique au procédé, prétention ridicule, mais qui se comporte comme lui placé dans les mêmes conditions. Deux notions essentielles apparaissent dans cette définition : la notion de classe de modèle et la notion d'équivalence. Nous allons dans le premier paragraphe développer ces deux notions en montrant les diverses possibilités qui nous sont offertes. Le deuxième paragraphe fait un tour d'horizon des méthodes les plus souvent rencontrées.

I-1. CHOIX DU MODELE ET DU CRITERE

I-1-1. Classes de modèles

Le choix de la classe de modèle est fondamental. C'est ce qu'on appelle *la caractérisation*. La caractérisation est l'étape qualitative au cours de laquelle on décide de donner une forme bien déterminée au modèle. C'est l'étape où l'on formule des hypothèses sur la nature du système. C'est ici qu'il faut au maximum tirer parti des connaissances a priori que l'on peut avoir. Si l'on a pu, par exemple, écrire tout ou partie des équations qui gouvernent le procédé, on a déjà une bonne idée du type de modèle à employer. On sait d'avance ce que représentent certains coefficients. On pourra utiliser ces connaissances soit d'emblée sous forme de contraintes par exemple -

Impossibilité pour une inertie d'être négative ... - soit une fois le modèle établi à titre de vérification.

La question primordiale qui se pose au début de la caractérisation est celle de *la linéarité* du système. Dans le cas des procédés industriels, cette hypothèse peut être faite puisqu'une unité fonctionne avec de petites variations autour d'un point nominal. Autant le modèle statique doit au maximum rendre compte des non-linéarités, autant le fonctionnement dynamique pourra être décrit par un modèle linéaire. A propos de linéarité, on trouve deux concepts différents en identification :

- *la linéarité par rapport aux variables d'entrée et de sortie* : c'est le concept classique ; les équations qui régissent le fonctionnement du système sont des équations linéaires, différentielles ou aux différences.
- *la linéarité par rapport aux paramètres* : les équations du modèle sont linéaires par rapport aux paramètres, mais peuvent être non linéaires par rapport aux entrées-sorties.

Illustrons ceci par un exemple :

$$\dot{y}(t) + a y(t) + b u^2(t) = 0$$

où $y(t)$ est la sortie du système, $u(t)$ l'entrée, a et b les paramètres : le système est non linéaire par rapport à l'entrée, mais linéaire par rapport à a et b .

On a un choix très large de classe de modèle, parmi lesquels nous allons citer les plus courants. On peut tout d'abord se fixer un *modèle continu* ou un *modèle discret*. On peut choisir une *représentation paramétrique* ou une *représentation non paramétrique*. Dans le premier cas, modèle paramétrique, on cherchera à identifier les coefficients d'équations différentielles dans le cas continu, par exemple :

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_1 \dot{u}(t) + b_2 u(t)$$

ou bien d'équations aux différences dans le cas discret :

$$y(K+2) + a'_1 y(K+1) + a'_2 y(K) = b'_1 u(K+1) + b'_2 u(K)$$

ou encore des fonctions de transfert du type :

$$\frac{K}{1 + T_p} \quad , \quad \frac{G}{Z - a}$$

On classe dans les modèles non paramétriques les réponses impulsionnelles, $h(t)$, telles que :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

avec $u(t-\tau) = 0 \quad t < \tau$

et les séquences de pondération :

$$y(K) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j u(K-j+1)$$

avec $u(K-j+1) = 0 \quad K-j+1 < 0$

Il existe des avantages et des inconvénients inhérents à chacune de ces représentations. Lorsqu'on pose un modèle paramétrique, on fixe a priori l'ordre (c'est-à-dire le nombre d'inconnues). Si ce choix est mauvais, on peut aboutir à des résultats complètement erronés et des différences de comportement énormes entre procédé et modèle. Dans ce cas, on est obligé de chercher des modèles d'ordres différents, parmi lesquels on choisit celui qui semble réaliser au mieux le compromis déjà évoqué précision-simplicité. Pour déterminer les paramètres d'une réponse impulsionnelle, ce genre d'hypothèse n'est pas nécessaire. Par contre, le nombre de paramètres est théoriquement infini. Pratiquement, on sait que $h(t)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini, et peut être considérée comme nulle à partir d'un instant T . Il n'en reste pas moins que le nombre d'inconnues à déterminer reste très grand par rapport à celui d'un modèle paramétrique. Autre inconvénient de ce type de modèle : on obtient la courbe $h(t)$, ou H_j , point par point ;

elle présente donc une allure en dent de scie, qu'il faut lisser. Remarquons encore qu'on obtient plus facilement la réponse impulsionnelle d'un modèle paramétrique qu'on ne passe d'une réponse impulsionnelle à un modèle paramétrique.

Nous concluons ce paragraphe en soulignant combien la caractérisation est une phase délicate de l'identification. C'est à l'utilisateur de faire un choix judicieux dont dépendra toute la qualité de son travail ultérieur. C'est sans doute ce qui fait dire à certains que l'identification est un art. Nous avons précisé que ce choix dépendait des connaissances a priori que l'on peut avoir ; il dépend aussi des moyens de calcul dont on dispose et bien sûr du but du modèle lui-même.

1-1-2. Equivalence : les critères

La notion d'équivalence que l'on trouve dans la définition de ZADEH s'exprime par l'intermédiaire d'un *critère*, qu'il s'agit de minimiser. C'est la deuxième étape du travail, ou *identification* proprement dite ; c'est l'étape quantitative. Il s'agit d'affecter des valeurs numériques aux paramètres choisis pour le modèle.

Considérons les divers types de critère proposés. Il en existe un très grand nombre, mais on peut à notre avis les classer en trois groupes. Ces critères sont l'expression mathématique de la différence entre le système - ou objet - et le modèle, de l'erreur d'identification. Si on se place dans l'espace paramétrique, espace engendré par les paramètres θ_j à déterminer, on peut définir dans cet espace une distance D du point M représentant le modèle au point P représentant le procédé. Cette distance est définie par le critère. Les types de distance rencontrés sont les suivants :

. *distance de structure* : Si $\underline{\theta}_p$, vecteur de composantes $\theta_{p,i}$ ($i = 1, \dots, n$) représente les paramètres du procédé, et de la même façon $\underline{\theta}$ ceux du modèle, on pose :

$$\underline{\Delta\theta} = \underline{\theta} - \underline{\theta}_p$$

$$D = f(\underline{\Delta\theta})$$

par exemple :

$$D = \underline{\Delta\theta}' A \underline{\Delta\theta}$$

A : matrice de pondération, définie positive (critère quadratique).

Ce type de distance est particulièrement approprié si l'on a un modèle de connaissance. Dans ce cas, on cherche effectivement les paramètres du modèle tels que $\underline{\theta} = \underline{\theta}_p$, et la distance de structure est très logique. Il faut cependant remarquer qu'elle n'est pas directement mesurable ou calculable puisqu'on ignore $\underline{\theta}_p$; on ne pourra en tenir compte qu'à travers ses effets, sur la sortie du modèle, par exemple. La minimisation d'une telle distance se ramène, en fait, avec des algorithmes un peu différents tout de même, à minimiser une des deux autres distances évoquées plus loin. Remarquons encore que cette distance perd beaucoup de sa signification lorsque l'objet et le modèle sont très différents, en particulier quand le modèle est plus simple (cas par exemple de l'approximation d'équations aux dérivées partielles par des équations différentielles).

. *distance d'état* : Si $y(t)$ est la sortie du modèle et $y_p(t)$ la sortie du procédé, soumis à la même entrée $u(t)$, on pose :

$$\epsilon = y(t) - y_p(t)$$

$$D = f(\epsilon)$$

avec $y(t) = g(u(t), \underline{\theta})$

(cf figure 1-1).

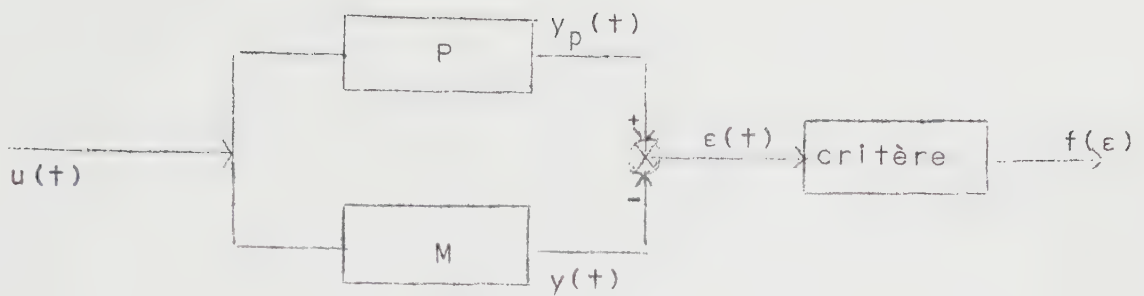


Figure 1-1

On peut par exemple prendre un critère absolu :

$$D = \sum_{t=1}^N |\epsilon(t)|$$

un critère quadratique :

$$D = \sum_{t=1}^N \epsilon^2(t)$$

Cette distance est particulièrement significative puisqu'elle consiste à choisir le vecteur $\underline{\theta}$ qui fait le mieux coïncider les sorties du système et du modèle.

. *erreur de prédiction* : on définit comme ci-dessus :

$$\epsilon = \hat{y}(t) - y_p(t)$$

$$D = f(\epsilon)$$

mais ici, $\hat{y}(t)$ représente la sortie prédite par le modèle à partir de toutes les mesures précédentes. Ce calcul fait non seulement intervenir les mesures de l'entrée, mais aussi celles de la sortie du système

$$\hat{y}(t) = g(u(t), y_p(t-1), \underline{\theta})$$

(cf figure 1-2)

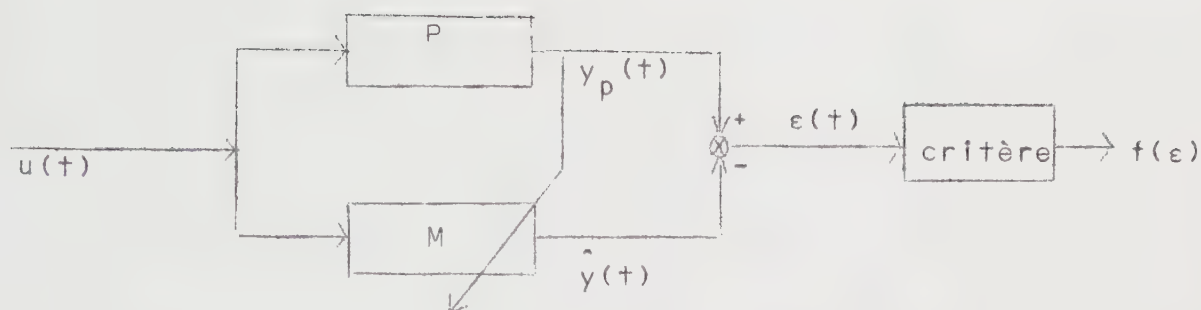


Figure 1-2

Une fois le critère choisi, il faut le minimiser. De nombreuses méthodes existent, et le paragraphe suivant les étudie. Mais avant de quitter cet exposé des concepts utilisés en identification, nous voulons encore souligner une partie de la phrase de ZADEH : "basée sur la connaissance des entrées-sorties du procédé". Ce sont les seules mesures à notre disposition. Ceci implique qu'on ne peut identifier que les transferts du système ; en conséquence, si on désire obtenir un modèle en variable d'état, ce modèle ne devra contenir que des états à la fois observables et commandables.

1-11. LES METHODES

Quant on a choisi le modèle et défini le critère, il ne reste plus qu'à minimiser celui-ci. Nous avons maintenant à résoudre un problème mathématique. Nous allons exposer dans ce paragraphe les outils mathématiques les plus généralement employés en identification.

1-11-1. La programmation non-linéaire

Le problème de la minimisation du critère peut être envisagé comme un problème d'optimisation paramétrique. On minimise alors le critère par une des méthodes maintenant classiques de P.N.L. (programmation non linéaire)(1). On définit l'espace paramétrique, espace engendré par les n paramètres du modèle θ_i , et dans cet espace les courbes isocritères, joignant

les points où le critère prend la même valeur (figure 1-3). Il s'agit, partant d'un point initial $\underline{\theta}_0$ de cet espace, de se déplacer vers le point représentatif du procédé, $\underline{\theta}_p$, où le critère est théoriquement nul. Nous disons théoriquement, car en fait, à cause du bruit de mesure, même si $\underline{\theta}$ coïncide avec $\underline{\theta}_p$, le critère ne sera pas nul. On cherche donc plutôt une zone de l'espace paramétrique où le critère est inférieur à une borne η . Les méthodes diffèrent entre elles par la façon dont on se déplace dans cet espace.

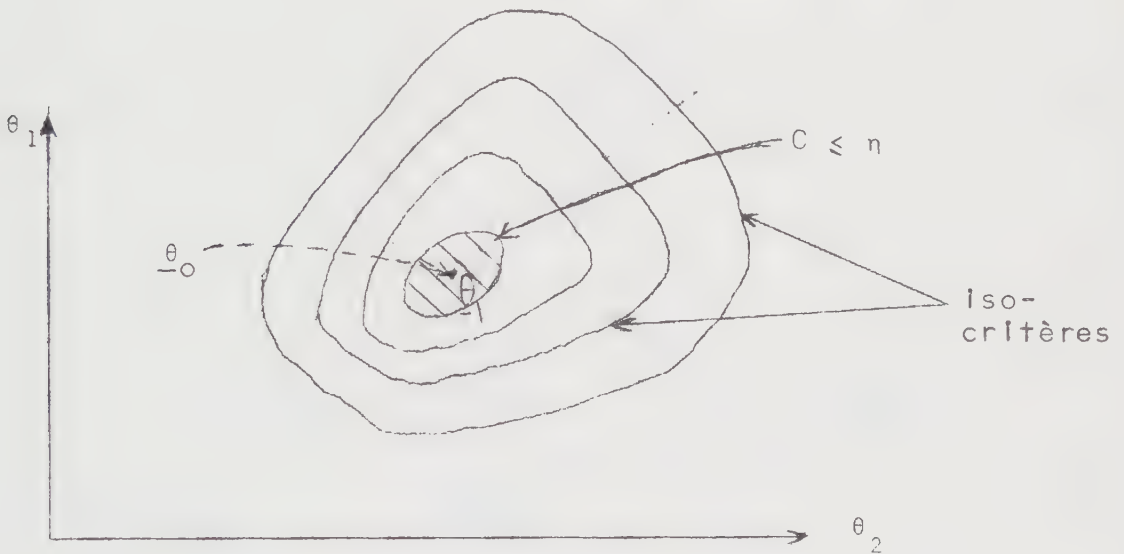


Figure 1-3

La méthode la plus courante est la *méthode du gradient*. Soit $C(\underline{\theta}_i)$ le critère au point $\underline{\theta}_i$ de l'espace paramétrique. Un développement au premier ordre de cette fonction, autour du point $\underline{\theta}_i$, est :

$$C(\underline{\theta}_i + d\underline{\theta}) = C(\underline{\theta}_i) + \underline{C}'_{\theta}(\underline{\theta}_i) d\underline{\theta} + O(\|d\underline{\theta}\|^2)$$

$\underline{C}_{\theta}(\underline{\theta}_i)$ est le gradient de la fonction C au point $\underline{\theta}_i$:

$$\underline{C}_{\theta}(\underline{\theta}_i) = \left(\frac{\partial C}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial C}{\partial \theta_2} \quad \dots \quad \frac{\partial C}{\partial \theta_n} \right)_{(\underline{\theta}_i)}$$

On montre que pour rendre la variation du critère maximale lorsqu'on passe du point $\underline{\theta}_i$ de l'espace au point $\underline{\theta}_{i+1}$, il faut choisir :

$$\underline{\Delta\theta}_i = \underline{\theta}_{i+1} - \underline{\theta}_i = - K_i \underline{C_{\theta}} (\underline{\theta}_i)$$

avec K_i positif pour assurer une diminution du critère. K_i est le pas de l'itération, laissé constant pour la méthode du gradient. De sa valeur dépend la rapidité de la convergence de la méthode.

On peut aussi faire un développement de $C(\underline{\theta}_i)$ au second ordre. L'étude de cette approximation conduit à un algorithme identique à celui de la méthode du gradient avec :

$$K_i = \left[\underline{C_{\theta\theta}} (\underline{\theta}_i) \right]^{-1}$$

$\underline{C_{\theta\theta}}$ est le hessien de la fonction $C(\underline{\theta})$:

$$\underline{C_{\theta\theta}} (\underline{\theta}_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 C}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 C}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ & \frac{\partial^2 C}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} & & \\ & & & \frac{\partial^2 C}{\partial \theta_n \partial \theta_n} \end{bmatrix} (\underline{\theta}_i)$$

Cette méthode est appelée *méthode de Newton-Raphson*. Elle converge mieux que la méthode du gradient si l'on est près de l'optimum $\underline{\theta}_p$, mais peut diverger lorsqu'on l'applique loin de ce point. On utilise en général un combiné des deux méthodes : méthode du gradient pour commencer la recherche, méthode de Newton-Raphson lorsqu'on se rapproche de l'optimum.

Dans le cas d'un critère quadratique :

$$C = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \epsilon^2(t)$$

par exemple, où $\epsilon(t)$ peut représenter l'écart sortie procédé

moins sortie modèle, on a :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \sum_{t=1}^N \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \theta_j} + \sum_{t=1}^N \frac{\partial^2 \epsilon(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \cdot \epsilon(t)$$

si l'on ne conserve que le premier terme de cette expression, seul le calcul des dérivées premières de $\epsilon(t)$ est nécessaire ; l'économie est appréciable. On appelle la méthode qui utilise cette simplification *méthode de Gauss-Newton*.

Le fait que les données soient bruitées perturbe le calcul des composantes du gradient. On risque ainsi de se déplacer dans une direction qui est loin d'être optimale, ce qui est d'autant plus dangereux qu'on est près de l'optimum. On démontre que la convergence de la méthode du gradient est assurée dans ce cas si :

$$K_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} K_i^2 < \infty$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} K_i = \infty$$

On choisit souvent :

$$K_i = \frac{1}{i}$$

C'est la *méthode de l'approximation stochastique*.

Pour toutes ces méthodes, on peut faire intervenir les connaissances a priori sous forme de contraintes, dans l'espace des paramètres. Si par exemple, le modèle est du type :

$$\frac{G}{1 + T p}$$

fonction de transfert du premier ordre, on sait que :

$$T > 0$$

On pourrait faire intervenir aussi une borne supérieure du gain :

$$G \leq G_{\max}$$

Ce qui conditionne le plus la recherche est l'allure des hypersurfaces $C = \text{cst}$, les isocritères. Quelques figures vont permettre de s'en rendre compte dans un espace à deux dimensions (recherche de deux paramètres θ_1 et θ_2).

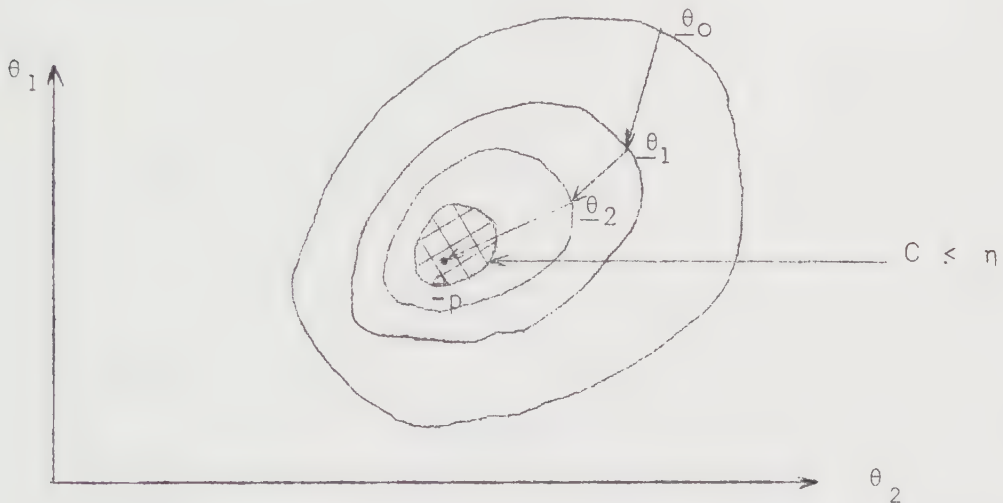


Figure 1-4 : méthode du gradient

On se déplace dans l'espace selon la direction du gradient, c'est-à-dire selon la normale à l'isocritère $C = \text{cst}$, c'est-à-dire encore la ligne de plus grande pente (figure 1-4). On cherche à atteindre la région de cet espace où $C \leq \eta$. La borne η est choisie par l'utilisateur. Elle dépend du problème traité : précision désirée, mais aussi bruit en sortie du système (c'est essentiellement à cause du bruit qu'on ne peut espérer une identification parfaite avec $C = 0$). On appelle vallée le lieu des points du plan où la pente est minimale. La méthode du gradient amène progressivement le point représentatif du modèle dans la vallée ; la progression, qui se fait proportionnellement à la pente, diminue donc d'itération en itération, d'où une convergence finale très lente. On peut parfois osciller d'une courbe isocritère à l'autre sans atteindre la région $C \leq \eta$ si le pas est choisi trop élevé. Mais si cette région est atteinte, l'identification n'est pas forcément bonne, et c'est

là que se posent les problèmes spécifiques à l'identification par P.N.L.. En effet, l'allure des courbes isocritères conditionne la précision sur chaque paramètre : ceci est illustré par la figure 1-5. Les paramètres du modèles sont θ_{1M} et θ_{2M} et ceux du procédé θ_{1p} et θ_{2p} : si θ_{2M} est proche de θ_{2p} , θ_{1M} est très éloigné de θ_{1p} , bien que le critère soit faible.

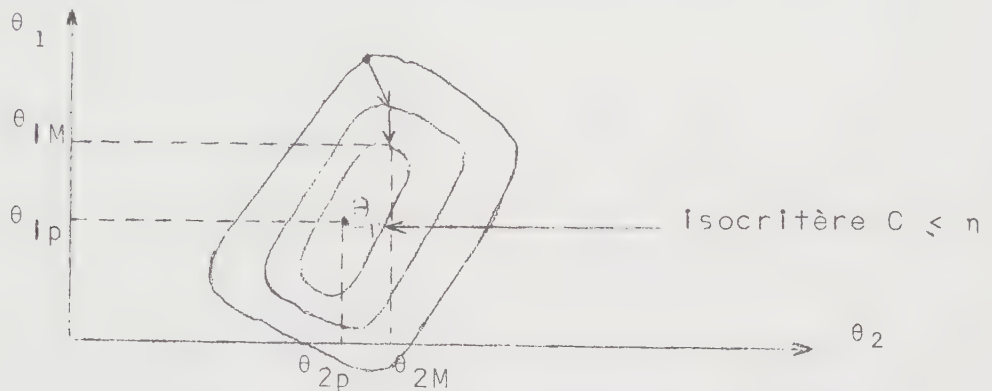


Figure 1-5

L'allure des courbes isocritères est surtout conditionnée par l'entrée utilisée pour l'identification - Le critère s'exprime en fonction des entrées-sorties du modèle et du procédé, seules grandeurs calculables ou accessibles et les sorties sont elles-mêmes fonction des entrées. Il faut donc faire preuve de prudence pour utiliser les méthodes de P.N.L., et en particulier choisir soigneusement les entrées. On essaiera d'utiliser soit une *entrée sphérissante* - telle que les courbes isocritères soient des hypersphères ; on a alors la même précision sur chaque paramètre - soit une succession d'*entrées sensibilisantes* - qui déforment les courbes isocritères de sorte qu'au moins un paramètre est identifié de façon précise ; cf. figure 1-5, le paramètre θ_2 ; il faut alors sensibiliser tour à tour chaque paramètre. De façon générale, on ignore quelle forme ont ces entrées particulières. Il faut alors effectuer l'identification pour différentes entrées et déterminer non pas des valeurs précises de paramètres, mais les régions $C \leq n$. (cf. figure 1-6)

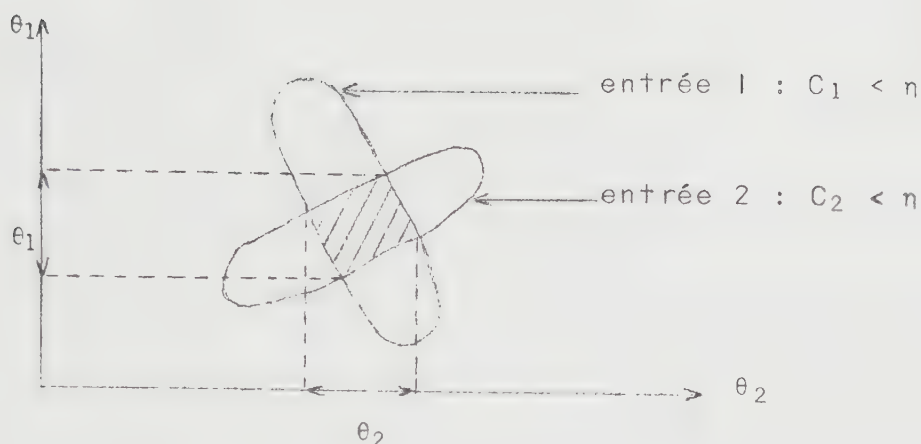


Figure 1-6

Nous n'avons fait que survoler tous les problèmes posés par l'utilisation de la P.N.L. en identification, mais nous espérons avoir montré que l'identification de paramètres par ces méthodes n'est pas une simple question d'optimisation paramétrique.

1-11-2. Les méthodes statistiques

Une autre approche de la minimisation du critère consiste, puisque les mesures sont entachées de bruit, à considérer l'identification comme un traitement de l'information et donc comme un *problème statistique*. On fait alors appel à la théorie de l'information. Signalons que toutes ces méthodes sont surtout utilisées quand le critère est basé sur une erreur de prédiction. On considère les mesures comme des variables aléatoires, dont les propriétés sont essentiellement déterminées par les propriétés statistiques du bruit. De nombreuses méthodes sont proposées pour trouver le vecteur des paramètres $\underline{\theta}$ du modèle, appelé estimateur du vecteur $\underline{\theta}_p$ des paramètres du procédé. Elles diffèrent essentiellement par le nombre des hypothèses formulées, en particulier sur la nature du bruit. Elles permettent d'attribuer une variance aux paramètres

du modèle $\underline{\theta}$, donc d'avoir une idée de la précision de l'identification.

On définit un certain nombre de propriétés des estimateurs ainsi obtenus :

- . *estimateur non biaisé* : $E.M. \{ \underline{\theta} \} = \underline{\theta}_p$
- . *estimateur efficace* : c'est celui qui a la variance minimale parmi tous les estimateurs non biaisés.
- . *estimateur consistant* : c'est celui dont la variance tend vers zéro quand le nombre de données tend vers l'infini.

La détermination des paramètres par des méthodes statistiques est basée généralement sur l'hypothèse suivante : les mesures effectuées sur le procédé, résumées dans le vecteur $\underline{Y}$, sont fonction des paramètres $\underline{\theta}_p$ du système, et de variables déterministes X , et entachées d'un bruit $\underline{b}$. Le modèle prend alors la forme suivante :

$$\underline{Y} = f(X ; \underline{\theta}_p) + \underline{b}$$

On cherche une estimation $\underline{\theta}$ du vecteur $\underline{\theta}_p$, à partir des mesures obtenues.

La méthode la plus sophistiquée, *la méthode de BAYES*, considère le vecteur $\underline{\theta}_p$ lui aussi comme un vecteur aléatoire. On définit alors un critère C , appelé coût de l'estimation, fonction de $\underline{\theta}$ et de $\underline{\theta}_p$, et la méthode consiste à minimiser l'espérance mathématique de ce critère, que l'on appelle risque. Dans le cas d'un critère quadratique, ($C = g [(\underline{\theta} - \underline{\theta}_p)^2]$), par exemple), l'estimateur de BAYES est la moyenne de la variable conditionnelle ($\underline{\theta}_p / \underline{Y}$). Dans le cas d'un critère constant, on trouve avec cette méthode que l'estimateur maximise la probabilité $p(\underline{\theta}_p / \underline{Y})$. Cette solution est appelée *le maximum de vraisemblance inconditionnel*. La méthode de BAYES suppose une trop grande connaissance des lois de probabilité des variables intervenant dans le modèle, et présente peu d'intérêt pour l'identification.

On considère plutôt les paramètres $\underline{\theta}_p$ comme déterministes. On peut alors chercher à maximaliser la probabilité :

$$p(\underline{\theta}_p / \underline{Y})$$

c'est-à-dire la densité de probabilité des paramètres conditionnelle aux mesures. La règle de BAYES nous donne :

$$p(\underline{\theta}_p / \underline{Y}) = \frac{p(\underline{Y} / \underline{\theta}_p) p(\underline{\theta}_p)}{p(\underline{Y})}$$

$\underline{\theta}_p$ étant déterministe, la solution est alors :

$$\max_{\underline{\theta}_p} \left\{ p(\underline{\theta}_p / \underline{Y}) \right\} = \max_{\underline{\theta}_p} \left\{ \frac{p(\underline{Y} / \underline{\theta}_p)}{p(\underline{Y})} \right\}$$

ou encore :

$$\max_{\underline{\theta}_p} \left\{ p(\underline{Y} / \underline{\theta}_p) \right\}$$

Il s'agit donc de maximaliser la probabilité des mesures a posteriori. La fonction $p(\underline{Y} / \underline{\theta}_p)$ est appelée fonction de vraisemblance et cette méthode *la méthode du maximum de vraisemblance*. La solution $\underline{\theta}$ est celle qui nous donne la probabilité maximale, c'est-à-dire la "chance" la plus grande, que l'on a de trouver avec le modèle la valeur des mesures expérimentales obtenues sur le système. On maximalise en général :

$$\text{Log} (p(\underline{Y} / \underline{\theta}_p))$$

que l'on appelle fonction de vraisemblance logarithmique. (Les maximums des deux fonctions coïncident car le logarithme est une fonction monotone, et la fonction de vraisemblance logarithmique est souvent plus maniable).

Supposons maintenant que le modèle soit linéaire par rapport aux données et aux paramètres, donc de la forme :

$$\underline{Y} = X \underline{\theta}_p + \underline{b}$$

X matrice constituée de valeurs déterministes et $\underline{b}$ bruit gaussien centré :

$$p(\underline{b}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N+1}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \underline{b}' R^{-1} \underline{b} \right)$$

avec :

$$E . M . \{ \underline{b} \} = \underline{0}$$

$$E . M . \{ \underline{b} \underline{b}' \} = R$$

N est le nombre de mesures, la dimension des vecteurs $\underline{Y}$ et $\underline{b}$.
Alors :

$$p(\underline{Y}/\underline{\theta}_p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N+1}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\underline{Y} - X\underline{\theta}_p)' R^{-1} (\underline{Y} - X\underline{\theta}_p) \right)$$

$$\text{Log} (p(\underline{Y}/\underline{\theta}_p)) = K - \frac{1}{2} (\underline{Y} - X\underline{\theta}_p)' R^{-1} (\underline{Y} - X\underline{\theta}_p)$$

L'estimateur est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}_p} \left((\underline{Y} - X\underline{\theta}_p)' R^{-1} (\underline{Y} - X\underline{\theta}_p) \right) = 0$$

$$\underline{\theta} = (X' R^{-1} X)^{-1} X' R^{-1} \underline{Y}$$

Cet estimateur est appelé *estimateur de MARKOV*. Il exige la connaissance de R , covariance du bruit. Si le bruit est blanc, il devient :

$$\underline{\theta} = (X' X)^{-1} X' \underline{Y}$$

qui est l'*estimateur des moindres carrés*.

Nous venons de montrer comment les divers estimateurs se déduisent les uns des autres quand on fait des hypothèses de plus en plus restrictives sur le système. Il existe aussi des conditions sur l'entrée du système, $u(t)$. Dans le cas des estimateurs du maximum de vraisemblance et des moindres carrés, ÅSTRÖM et BOHLIN ont montré (2) que l'estimateur converge si :

$$u_{\text{moy}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(i) < \infty$$

$$\forall j < \infty: r_u(j) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u(i) - u_{\text{moy}}) (u(i+j) - u_{\text{moy}}) < \infty$$

et si A étant la matrice définie comme suit :

$$A = \{a_{ij} = r_u(i-j)\} \quad i, j = 1, \dots, n$$

n étant l'ordre du système, A est définie positive.

Cette condition exprime en fait que l'entrée doit varier suffisamment autour d'une valeur moyenne finie pour pouvoir exciter tous les paramètres du système. On retrouve ici le problème de l'influence de l'entrée, qui se faisait sentir sur l'allure des courbes équilatères en P.N.L.

On peut encore citer un autre type de minimisation du critère : la minimisation d'une distance d'état s'effectue grâce à la théorie de l'hyperstabilité. L'algorithme ainsi obtenu sur un système monovariable sous forme de fonction de transfert (3 - p. 13) est identique à celui obtenu quand on minimise une distance mixte (distance d'état + distance de structure) par une méthode classique (5 - p. 245-247).

Nous venons d'établir une classification des méthodes d'identification en deux grands groupes : optimisation paramétrique et estimation statistique. En fait, la séparation n'est pas aussi nette et les deux idées s'interpénètrent. Nous avons vu par exemple comment choisir le pas de l'itération de la méthode du gradient pour assurer la convergence malgré le bruit sur le système ; la méthode du maximum de vraisemblance, comme nous le verrons plus loin, aboutit à la minimisation d'un critère qui ne peut se faire que par P.N.L.

Ce bref survol des méthodes les plus classiques a pu nous permettre de nous convaincre de l'importance *primordiale de l'entrée*. Nous avons vu son influence sur les courbes isocritères ; nous avons vu les conditions définies par ÅSTRÖM et BOHLIN. Il est bien évident que certaines données seront plus "payantes" que d'autres, du point de vue de l'information. Un essai statique par exemple ne pourra fournir que le gain statique. Il est clair que, quelle que soit la méthode utilisée, elle ne peut traiter que l'information qu'on lui fournit - avec plus ou moins de bonheur sans doute - mais qu'elle n'en crée pas. Il est donc important de choisir une entrée qui excite bien le système. Pour l'intérêt général d'une méthode, on préfère qu'elle n'impose pas d'entrée particulière, mais sur un procédé industriel, on aura souvent le choix de cette entrée - contrairement aux systèmes biologiques par exemple. Il faut évidemment mener les expérimentations au cours du fonctionnement normal de l'unité de production, mais on peut superposer à l'entrée habituelle un signal de test particulier, à condition qu'il ne perturbe que faiblement la sortie. La théorie de l'information nous enseigne que l'entrée idéale est un bruit blanc. C'est pourquoi nous avons utilisé au cours de nos essais des séquences binaires pseudo-aléatoires, qui sont des signaux déterministes dont le spectre est très proche de celui d'un bruit blanc.

Nous avons personnellement étudié les méthodes d'estimation statistique. Pourquoi ce choix ? Notre but est de comparer plusieurs méthodes entre elles. Or on peut dire que la P.N.L. ne comporte pas plusieurs méthodes, mais une seule, basée sur le calcul du gradient, et que l'on peut plus ou moins sophistiquer. Les propriétés de divers algorithmes sont déjà bien connues (4). De plus, si l'on veut avoir une idée de la précision des paramètres, il faut, nous l'avons vu, identifier plusieurs séries de données obtenues pour des entrées $u_i(t)$ différentes et tracer au moins les isocritères $C_i, i \leq n$ dans le plan des paramètres, ce qui est très lourd. La raison majeure

de notre choix est que ces méthodes ont été très largement étudiées par l'équipe de RICHALET au D.E.R.A. (5) alors que les méthodes statistiques ont été peu utilisées en France jusqu'à présent.

L'éventail de ces méthodes est large, et elles présentent des différences importantes entre elles. Nous verrons que la méthode des moindres carrés, qui a l'avantage de la simplicité, tant du point de vue théorique que pratique, a le grave Inconvénient de donner une estimation biaisée, et conduit à des erreurs grossières ; diverses solutions ont été proposées pour améliorer ses performances, mais on n'a pu démontrer la convergence d'aucune de ces méthodes ; dans quelle mesure peut-on leur faire confiance, laquelle est-elle préférable ? Nous verrons qu'une autre méthode, qui n'a pas été évoquée dans ce chapitre, la méthode de la matrice instrumentale, est aussi simple à mettre en oeuvre que les moindres carrés, tout en donnant un estimateur non biaisé. La méthode du maximum de vraisemblance, qui a un support théorique très riche, est par contre plus lourde d'emploi, et nécessite l'hypothèse de bruit gaussien. Que se passe-t-il quand cette hypothèse n'est pas vérifiée ? Est-ce vraiment la peine d'utiliser une méthode aussi complexe ? Faut-il systématiquement préférer la méthode de la matrice instrumentale qui est à la fois simple et rigoureuse ? On voit que les questions sont nombreuses. Nous nous sommes efforcés d'y répondre dans cet ouvrage.

CHAPITRE 2

ETUDE DU MODELE

Nous allons dans ce chapitre expliquer le choix que nous avons fait pour le modèle. Nous étudierons ensuite ce modèle en détail, car il importe d'avoir à l'esprit la signification exacte de chacun de ses paramètres. Puis nous verrons comment passer de ce modèle à d'autres types de représentation couramment utilisés.

2-1. LE MODELE CHOISI

2-1-1. Justification du choix

Le choix du modèle n'est pas entièrement libre. En effet, il est en partie imposé par le choix des méthodes. Or les méthodes statistiques s'appliquent à l'identification de façon très souple uniquement quand le modèle est linéaire par rapport aux paramètres. Voici d'emblée une large classe de modèles éliminée.

Les fonctions de transfert ne peuvent être identifiées telles quelles. On est obligé de se ramener à des signaux mesurables, donc soit à l'équation différentielle (ou aux différences) correspondante, soit à l'expression temporelle de la sortie de ce transfert à une entrée classique (par exemple : réponse à un échelon unitaire d'une constante de temps τ : $1 - e^{-t/\tau}$). Dans le dernier cas, le modèle n'est pas linéaire par rapport aux paramètres.

Il nous faut choisir, parmi les modèles les plus utilisés, entre :

$$(2-1) \quad y(t) + a_1 y^{(1)}(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t) = b_1 u(t) + \dots + b_p u^{(p)}(t)$$

$$(2-2) \quad y(K+n) + a'_1 y(K+n-1) + \dots + a'_n y(K) = b'_1 u(K+p) + \dots + b'_p u(K)$$

$$(2-3) \quad \begin{cases} y(K) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j u(K-j+1) \\ \text{avec} \quad u(K-j+1) = 0 \quad \text{pour} \quad K-j+1 < 0 \end{cases}$$

Le modèle (2-1) est d'un emploi difficile. Généralement, on ne peut mesurer ni les dérivées de l'entrée, ni celles de la sortie, et les obtenir par dérivations successives des signaux mesurables est délicat sur le plan expérimental. Ce modèle a donc été éliminé, et on peut remarquer que les seuls modèles qui nous restent sont des modèles de systèmes discrets. Ceci n'est pas à notre avis un inconvénient majeur. Les mesures sont en effet généralement obtenues par un ordinateur en ligne sur le procédé, donc l'information en notre possession est une information discrète. L'identification elle-même est menée à bien par un ordinateur, donc l'information est traitée de façon discrète. Le modèle n'est pas un but en lui-même, mais généralement un outil mathématique pour la commande du système. Cette commande sera elle aussi dans la plupart des cas mise en oeuvre, par le calculateur en ligne, de façon discrète. Nous pensons qu'il est préférable dans un tel cas de chercher directement un modèle discret, ceci afin d'éviter le plus d'intermédiaires possible entre l'observation du système et sa commande. Nous avons déjà précisé au chapitre 1-1-1 quels étaient les avantages et inconvénients relatifs des modèles (2-2) et (2-3) : le modèle (2-3) nécessite l'identification d'un grand nombre de paramètres, et fournit de plus une séquence de pondération en dent de scie, puisque les amplitudes des points de la courbe sont les paramètres à déterminer. (Soulignons qu'une méthode de lissage a été mise au point par A. BARRAULT dans le cas de la méthode des moindres carrés (6)). Le problème majeur soulevé par un modèle du type (2-2) est celui de la détermination de l'ordre du modèle, n dans cet exemple ; en effet, on ignore souvent tout de l'ordre du système à identifier. Il se peut même que celui-ci soit un système à paramètres répartis, donc d'ordre théoriquement infini, que l'on assimile à un système

linéaire, d'ordre fini. Il faut donc trouver quel est l'ordre du modèle qui simule le mieux le fonctionnement du système, ce choix peut être difficile. C'est cependant ce type de modèle que nous avons utilisé. Nous verrons plus loin quelles techniques peuvent aider au choix de l'ordre.

2-1-2. Analyse du modèle choisi

Considérons le système représenté figure 2-1.

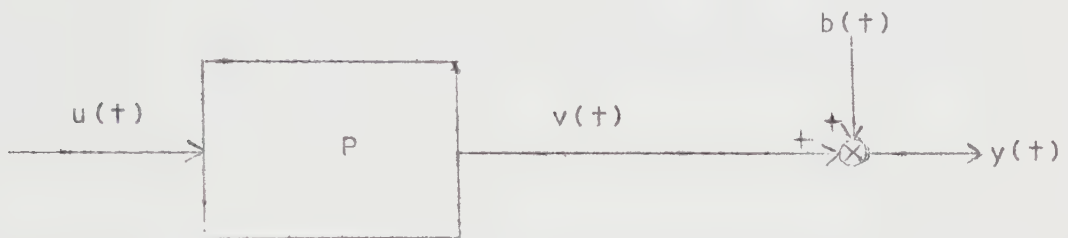


Figure 2-1

- $u(t)$ est l'entrée du procédé
- $v(t)$ est la sortie du procédé
- $b(t)$ est un bruit additif sur la sortie. Ce bruit doit rendre compte d'une part du bruit de mesure, qui perturbe les données expérimentales, d'autre part du bruit dû au fonctionnement lui-même du procédé. Ce bruit peut être ramené en sortie grâce à l'hypothèse de linéarité du système. Disons que, alors que $v(t)$ représente la partie déterministe de la sortie, ce qui est dû à l'entrée appliquée et au fonctionnement "normal" du système, $b(t)$ représente le "hasard", la partie aléatoire, et est la conséquence de tous les phénomènes non expliqués par les équations que l'on pourra écrire.
- $y(t)$ est la sortie mesurée du procédé.

Dans tout ce qui suit, on supposera que les enregistrements de l'entrée ne sont perturbés par aucun bruit. Cette hypothèse n'a rien d'irréaliste ; ce signal sera généralement fourni par le calculateur en ligne sur le système, et donc parfaitement connu, surtout si c'est un signal du type échelon ou séquence binaire pseudo-aléatoire, sur lesquels il n'y a pas

d'erreurs de quantification.

Le procédé est supposé stationnaire.

Si n est l'ordre du système, l'équation aux récurrences la plus générale décrivant son fonctionnement est :

$$v(t) + a_1 v(t-T) + \dots + a_n v(t-nT) = b_0 u(t) + b_1 u(t-T) + \dots + b_p u(t-pT)$$

où T est la période d'échantillonnage du système. Nous traiterons le cas du retard pur dans un paragraphe ultérieur. Pour éviter d'alourdir les équations, nous supposerons par la suite la période T unitaire :

$$T = 1$$

$$\Rightarrow v(t) + a_1 v(t-1) + \dots + a_n v(t-n) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_p u(t-p)$$

Pour que le système soit physiquement réalisable, il faut :

$$p \leq n$$

Nous avons par hypothèse :

$$y(t) = v(t) + b(t)$$

L'équation du système devient :

$$(2-4) \quad y(t) + \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i) + b(t) + \sum_{i=1}^n a_i b(t-i)$$

Utilisons maintenant l'opérateur de retard Z^{-1} pour réécrire l'équation ; cet opérateur est défini comme suit :

$$x(t-1) = Z^{-1} x(t)$$

donc :

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i Z^{-i} y(t) = \sum_{i=0}^p b_i Z^{-i} u(t) + b(t) + \sum_{i=1}^n a_i Z^{-i} b(t)$$

ou encore :

$$(2-5) \quad A(Z^{-1})y(t) = B(Z^{-1})u(t) + A(Z^{-1})b(t)$$

avec :

$$\begin{aligned} A(Z^{-1}) &= 1 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_n Z^{-n} \\ B(Z^{-1}) &= b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_p Z^{-p} \end{aligned}$$

Remarquons que pour que le système soit stable, les racines du polynôme $A(Z^{-1})$ doivent toutes appartenir à l'intérieur du cercle unité dans le plan des Z . On supposera de plus que les polynômes $A(Z^{-1})$ et $B(Z^{-1})$ n'ont aucun facteur commun : ceci correspond à la condition d'observabilité et de commandabilité du système.

a) Les résidus

Nous allons écrire le modèle sous la forme générale suivante :

$$(2-6) \quad A(Z^{-1})y(t) = B(Z^{-1})u(t) + e(t)$$

avec :

$$(2-7) \quad e(t) = A(Z^{-1})b(t)$$

$e(t)$ représente un "bruit généralisé" que l'on appelle encore résidu.

Nous allons examiner de plus près ce que représentent les résidus :

$$(2-8) \quad e(t) = y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) - b_0 u(t) - \dots - b_p u(t-p)$$

Cherchons à prédire la sortie du procédé à l'aide du modèle, des mesures passées et de la consigne. Nous noterons cette prédiction à l'instant t $\hat{y}(t/t-1)$:

$$(2-9) \quad \hat{y}(t/t-1) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_0 u(t) + \dots + b_p u(t-p)$$

Remarquons bien la différence entre les concepts de sortie prédite par le modèle et de sortie du modèle : pour connaître la prédiction à l'instant t , il suffit de connaître *les mesures*

aux n instants précédents ; pour connaître la sortie du modèle y_M , il faudrait *calculer* la solution de l'équation récurrente :

$$A(Z^{-1}) y_M(t) = B(Z^{-1}) u(t)$$

depuis l'instant zéro, avec n *conditions initiales*.

Des équations (2-8) et (2-9), on tire :

$$(2-10) \quad e(t) = y(t) - \hat{y}(t/t-1)$$

Le résidu représente l'erreur de prédiction du modèle. Si les paramètres du modèle et du système sont identiques, cette erreur est uniquement fonction du bruit sur le système :

$$e(t) = A(Z^{-1}) b(t)$$

Dans le cas contraire, elle est aussi fonction de l'imprécision des paramètres. Elle peut dépendre encore d'un mauvais choix de l'ordre du modèle. Elle aura dans ce cas assez peu de lien avec le bruit $b(t)$.

b) Cas d'un bruit à valeur moyenne non nulle

Supposons le bruit du système formé d'une composante centrée, que nous noterons $\tilde{b}(t)$ et d'une composante continue B_0 :

$$b(t) = \tilde{b}(t) + B_0$$

L'équation (2-4) devient :

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i) + \tilde{b}(t) + B_0(t) + \sum_{i=1}^n a_i (\tilde{b}(t-i) + B_0(t-i))$$

soit, puisque le système est stationnaire :

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i) + B_0(1 + \sum_{i=1}^n a_i) + \tilde{b}(t) + \sum_{i=1}^n a_i \tilde{b}(t-i)$$

qui devient, en posant :

$$Y_0 = B_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i \right)$$

$$A(Z^{-1})y(t) = B(Z^{-1})u(t) + A(Z^{-1})\tilde{b}(t) + Y_0$$

Y_0 représente donc la composante continue de la sortie due au bruit et $A(Z^{-1})\tilde{b}(t)$ est un bruit à valeur moyenne nulle. On peut se ramener à une équation de la forme (2-6)

$$(2-11) \quad A(Z^{-1})y(t) = B(Z^{-1})u(t) + e(t) + Y_0$$

Le résidu pourra toujours être supposé centré ; il suffira d'adjoindre à l'équation la composante continue Y_0 telle que :

$$(2-12) \quad Y_0 = B_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i \right)$$

qui sera considéré comme un paramètre à identifier.

c) Extension à plusieurs entrées

Elle est évidente. Si la sortie $v(t)$ - cf figure 2-1- est la conséquence de m entrées, $u_1(t)$, ..., $u_m(t)$, on aura :

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_{01} u_1(t) + \dots + b_{p1} u_1(t-p) + b_{02} u_2(t) + \dots + b_{om} u_m(t) + \dots + b_{sm} u_m(t-s) + e(t)$$

$$A(Z^{-1})y(t) = B_1(Z^{-1})u_1(t) + B_2(Z^{-1})u_2(t) + \dots + B_m(Z^{-1})u_m(t) + e(t)$$

Dans tout ce qui suit nous ne traiterons que le cas mono-entrée, mono-sortie. Le lecteur pourra facilement faire l'extension au cas multi-entrées, mono-sortie d'après ce qui précède. Quant au cas multivariable proprement dit, il est très rarement traité en tant que tel dans la littérature. Bien souvent les gens parlent d'identification multivariable quand ils se sont contentés de juxtaposer des problèmes et des solutions mono-variables, ce qui a pour effet d'augmenter la complexité des calculs, que l'on effectue globalement et non morceau par morceau, sans rendre la solution plus simple. Le

processus généralement utilisé pour l'identification d'un système multivariable consiste à maintenir toutes les entrées constantes sauf une et de regarder son effet sur les diverses sorties. Le modèle global sera ainsi obtenu transfert par transfert. Mais il y a alors un problème d'ordre minimal qui n'est pas facile à résoudre. Supposons qu'un des pôles d'une fonction de transfert soit 0,93 et un des pôles d'une autre fonction de transfert 0,96. Doit-on conclure qu'il existe deux pôles différents, donc deux variables d'état, deux Intégrateurs distincts, ou bien ces pôles correspondent-ils aux erreurs numériques près, au même intégrateur ? Le problème est délicat ; personnellement, nous ne l'avons pas traité dans cet ouvrage.

d) Cas du retard pur

Le modèle des procédés industriels nécessite souvent l'introduction d'un temps mort. Ce retard peut avoir une cause physique : transport de matière, par exemple. Il peut aussi servir à simplifier le modèle : une constante de temps très faible par rapport à une autre pourra être facilement approchée par un retard. Ceci apparaît clairement figure 2-2 où nous avons représenté la réponse à un échelon de consigne d'un système du second ordre dont la première constante de temps, très faible, n'intervient que dans la zone notée ①. Elle sera facilement assimilable au retard R_e .

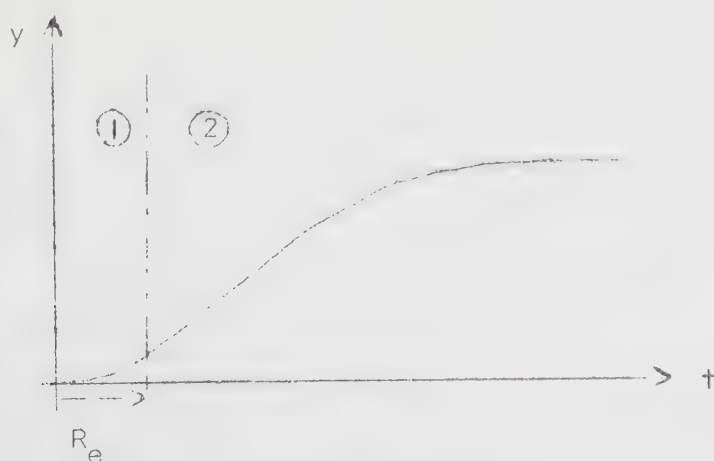


Figure 2-2

Si l'on suppose, pour une raison ou pour une autre, que le système possède un retard pur, ce retard sera compté en nombre entier de période d'échantillonnage :

$$R_e = R \cdot T = R$$

puisque nous avons supposé T unitaire.

L'équation (2-4) devient :

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i-R) + b(t) + \sum_{i=1}^n a_i b(t-i)$$

et l'équation (2-6)

$$A(Z^{-1}) y(t) = Z^{-R} B(Z^{-1}) u(t) + e(t)$$

Le retard se traduit donc par une simple translation de l'entrée égale à R fois la période d'échantillonnage. Les méthodes d'identification que nous approfondirons plus loin ne traitent pas le retard comme un paramètre quelconque à identifier, mais comme une donnée a priori. Remarquons qu'il est facile sur un enregistrement d'attribuer une valeur numérique à ce retard, ou au moins de bien l'encadrer. Il suffira donc pour utiliser les algorithmes proposés d'opérer une translation des données de l'entrée. On pourra répéter l'opération pour un certain nombre de valeurs de R et choisir les résultats jugés les meilleurs.

Nous supposerons dans tout ce qui suit le retard nul; ceci évite d'alourdir les équations et nous venons de voir qu'il est facile de ramener les données expérimentales que l'on possède à ce cas.

2-11. CHANGEMENT DE REPRESENTATION

Nous allons rappeler dans ce paragraphe diverses manières de passer d'un type de modèle à l'autre.

2-11-1. Fonction de transfert échantillonnée

Nous sommes en possession d'un modèle en équation aux différences :

$$(2-13) \quad y(t) + \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i)$$

Calculons la transformée en Z de cette équation. Rappelons que la transformée en Z d'un signal $y(t)$ nul pour $t < 0$ est :

$$\begin{aligned} Z(y(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n) Z^{-n} = Y(Z) \\ Z(y(t-K)) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n-K) Z^{-n} = Z^{-K} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-K) Z^{-n+K} \\ &= Z^{-K} \sum_{m=-K}^{\infty} y(m) Z^{-m} = Z^{-K} \sum_{m=0}^{\infty} y(m) Z^{-m} \\ &= Z^{-K} Y(Z) \end{aligned}$$

puisque $y(t) = 0 \quad \forall t < 0$

Donc la transformée en Z de l'équation récurrente (2-13) est :

$$(2-14) \quad Y(Z) + \sum_{i=1}^n a_i Z^{-i} Y(Z) = \sum_{i=0}^p b_i Z^{-i} U(Z)$$

$$\frac{Y(Z)}{U(Z)} = F(Z) = \frac{\sum_{i=0}^p b_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i Z^{-i}}$$

C'est la fonction de transfert échantillonnée du système (définie pour des signaux nuls pour $t < 0$). Le passage équation aux récurrences - fonction de transfert est immédiat.

Remarquons que le gain statique G du système est donné par :

$$G = \frac{\sum_{i=0}^p b_i}{1 + \sum_{i=1}^n a_i}$$

2-11-2. Séquence de pondération

C'est l'équivalent pour un système discret de la réponse impulsionnelle. C'est la réponse du système à une impulsion unitaire, noté $\delta(t)$

$$Z(\delta(t)) = 1$$

$$\Rightarrow Y(Z) = F(Z) \cdot 1 = F(Z)$$

Les points successifs de la réponse sont obtenus par la division selon les puissances décroissantes de Z , des deux polynomes :

$$(2-15) \quad F(Z) = \frac{\sum_{i=0}^p b_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i Z^{-i}} = H_0 + H_1 Z^{-1} + \dots + H_n Z^{-n} + \dots$$

2-11-3. Modèle d'état discret

Rappelons que puisque l'identification ne donne accès, par l'intermédiaire de la connaissance des entrées-sorties du système, qu'aux fonctions de transfert, le modèle d'état équivalent ne doit comporter que des états observables et commandables.

Le modèle d'état est défini comme suit :

$$\underline{X}(K+1) = A \underline{X}(K) + B \underline{U}(K)$$

$$\underline{Y}(K) = C \underline{X}(K) + D \underline{U}(K)$$

$\underline{X}(K)$, vecteur des variables d'état, est de dimension n . Il existe une infinité de modèles d'état d'ordre n équivalents à l'équation (2-13), qui se déduisent les uns des autres par une transformation linéaire. Nous allons donner le plus classique, dans le cas monovariable - $\underline{U}(K)$ et $\underline{Y}(K)$ ne sont plus des vecteurs mais des variables -, appelé communément représentation canonique. Posons :

$$y(K) = \beta_0 u(K) + x_1(K)$$

$$x_i(K+1) = x_{i+1}(K) + \beta_i u(K) \quad i < n$$

$$x_n(K+1) = -a_n x_1(K) - \dots - a_1 x_n(K) + \beta_n u(K)$$

Par substitution, on trouve :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} (K+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} (K) + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u(K)$$

$$y(K) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} (K) + \beta_0 u(K)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & & & \\ a_2 & & & \\ \vdots & & & \\ a_n & \dots & a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$b_i = 0 \quad i > p$$

Le diagramme de simulation est reporté figure 2-3, où $\boxed{R}$ symbolise un retard d'une période d'échantillonnage.

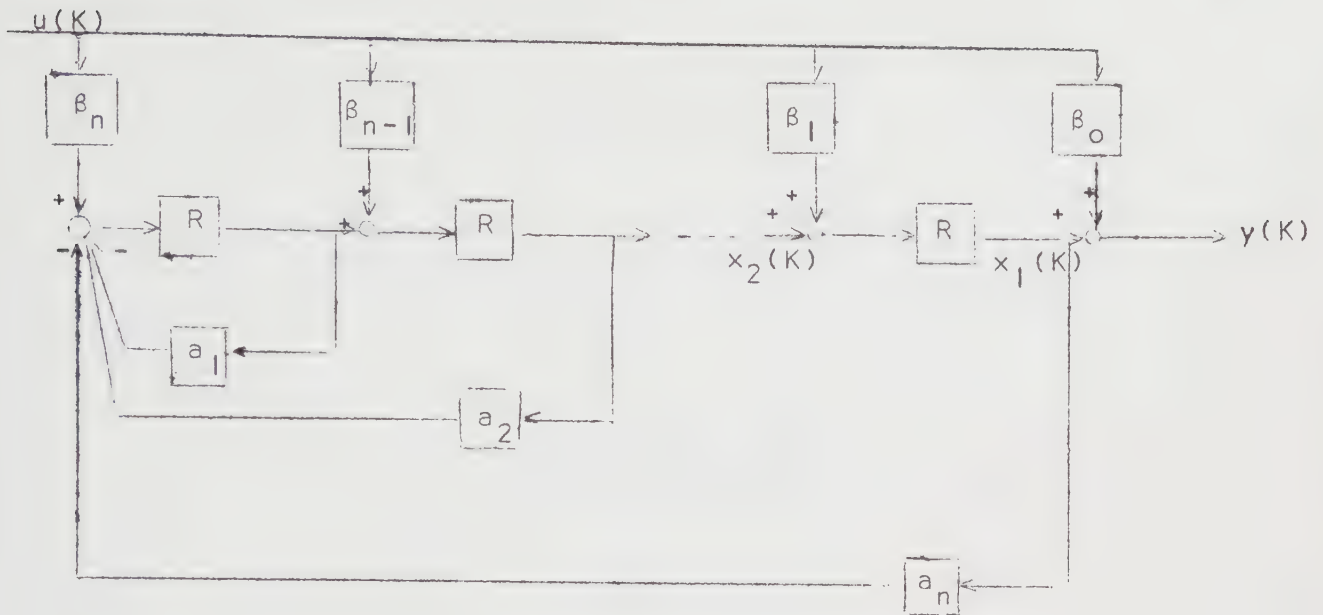


Figure 2-3

Le cas multivariable est beaucoup plus complexe. Nous renvoyons le lecteur intéressé par ce problème à la référence (7), et à la référence (8) qui décrit (pp. VI-V9) une méthode assez simple dans le cas de systèmes comportant des retards purs, pour tenir compte de ceux-ci séparément.

2-11-4. Modèle d'état continu (9)

Nous allons maintenant étudier l'équivalence entre un modèle d'état discret et un modèle d'état continu. Plus explicitement, cherchons le modèle discret tel que si l'on fait agir une entrée discrète sur celui-ci et sur le modèle continu par l'intermédiaire d'un bloqueur, les états aux instants discrets soient identiques pour une même condition initiale. On voit que cette démarche est différente de celle qui consisterait à chercher la transformée de Laplace $F(p)$ correspondant à la transformée en Z , $F(Z)$ (transformée que l'on pourrait trouver facilement, la plupart des livres traitant des systèmes échantillonnés comportant des tables de correspondance). On a le schéma de la figure 2-4.

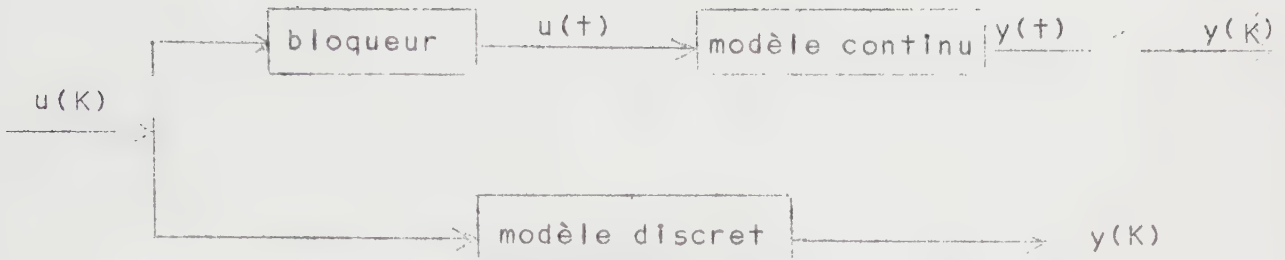


Figure 2-4

On reconnaît sur ce schéma le problème auquel on est confronté au cours de l'identification de procédés industriels: $u(K)$ est la commande fournie par le calculateur; elle agit sur le système continu par l'intermédiaire d'un bloqueur; la sortie $y(K)$ est celle que le calculateur enregistre à chaque instant d'échantillonnage et que l'on utilise pour l'identification. L'étude que nous allons présenter est donc en parfait accord avec les besoins pratiques.

Le modèle d'état continu est :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{X}}(t) &= \underline{A}_C \underline{X}(t) + \underline{B}_C u(t) \\ y(t) &= \underline{C}_C \underline{X}(t)\end{aligned}$$

et sa solution :

$$\underline{X}(t) = \exp(\underline{A}_C(t-t_0)) \underline{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(-\underline{A}_C(t-\tau)) \underline{B}_C u(\tau) d\tau$$

où $\underline{X}(t_0)$ est le vecteur de conditions initiales.

On a en particulier :

$$\underline{X}(t+T) = \exp(\underline{A}_C(t+T-t)) \underline{X}(t) + \int_t^{t+T} \exp(-\underline{A}_C(t+T-\tau)) \underline{B}_C u(\tau) d\tau$$

Si l'on échantillonne, on peut écrire :

$$(2-16) \quad \underline{X}(KT+T) = \exp(A_C T) \underline{X}(KT) + \int_+^{T+T} \exp(A_C (T+t-\tau)) \underline{B}_C u(\tau) d\tau$$

que l'on identifie à :

$$\underline{X}((K+1)T) = A(T) \underline{X}(KT) + \underline{B}(T) u(K)$$

on tire immédiatement :

$$A(T) = \exp(A_C T)$$

Supposons maintenant le bloqueur d'ordre zéro (c'est souvent le cas en pratique):

$$u(t) = u(KT) \quad KT < t \leq (K+1)T$$

La deuxième partie de l'équation (2-16) devient :

$$\begin{aligned} & \int_+^{T+T} \exp(A_C (t+T-\tau)) \underline{B}_C u(KT) d\tau \\ \Rightarrow \underline{B} &= \int_+^{T+T} \exp(A_C (t+T-\tau)) \underline{B}_C d\tau \end{aligned}$$

Si A est régulière :

$$\underline{B}(T) = A_C^{-1} (\exp(A_C T) - I) \underline{B}_C$$

La matrice C_C est égale à la matrice C.

Dans le cas de la transformation Inverse, on considère que le système continu est la limite du système échantillonné quand la période d'échantillonnage tend vers zéro :

$$A(T) \xrightarrow{T \rightarrow dt \rightarrow 0} I + A dt$$

$$B(T) \xrightarrow{T \rightarrow dt \rightarrow 0} B \cdot dt$$

2-11-5. Matrices de transfert

Dans le cas du système discret :

$$\underline{X}(K+1) = A \underline{X}(K) + B \underline{U}(K)$$

$$\underline{Y}(K) = C \underline{X}(K)$$

la matrice de transfert échantillonnée est :

$$F(Z) = C (Z I - A)^{-1} B$$

qui se réduit, dans le cas monovariable où les vecteurs $\underline{Y}(K)$ et $\underline{U}(K)$ sont des variables (B vecteur colonne, C vecteur ligne) à une simple fonction de transfert.

Dans le cas du système continu :

$$\dot{\underline{X}}(t) = A_c \underline{X}(t) + B_c u(t)$$

$$y(t) = C_c \underline{X}(t)$$

la fonction de transfert est :

$$F(p) = C_c (p I - A_c)^{-1} B_c$$

on peut utiliser, si l'inversion de la matrice $(p I - A_c)$ - ou $(Z I - A)$ - n'est pas faisable à la main, l'algorithme de Fadeev-Leverrier-Souriau.

2-11-6. Relation réponse impulsionnelle - séquence de pondération

On écrit en continu :

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

ou encore :

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

avec $u(t-\tau) = 0 \quad \forall t < \tau$

et en discret :

$$y(KT) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j u((K-j+1)T)$$

$$\text{avec } u((K-j+1)T) = 0 \quad \forall (K-j+1) < 0$$

Les systèmes industriels sont généralement asymptotiquement stables ; ceci se traduit par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0 \quad \text{ou : } h(t) \approx 0 \quad t > m$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} H_j = 0 \quad \text{ou : } H_j \approx 0 \quad j > M$$

ce qui conduit à écrire :

$$y(t) = \int_0^m h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

$$y(KT) = \sum_{j=1}^M H_j u((K-j+1)T)$$

Nous allons, comme pour les modèles d'état, donner l'équivalence entre $h(t)$ et H_j selon le schéma de la figure 2-5.

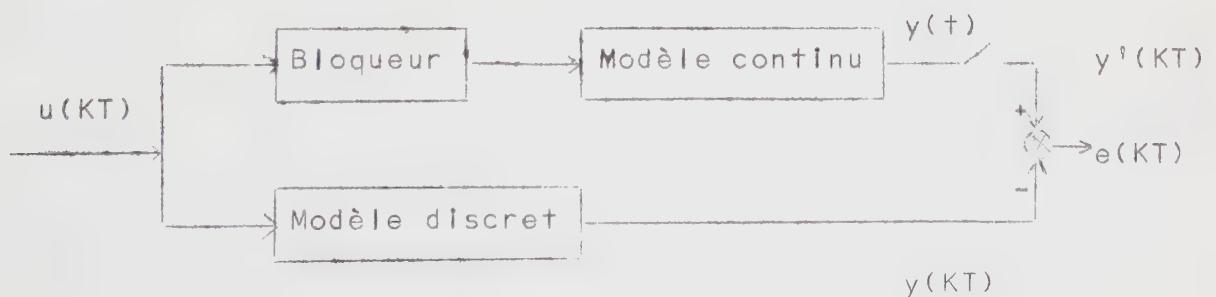


Figure 2-5

$u(KT)$ est l'entrée discrète des deux systèmes. Chercher à minimiser :

$$E . M . \{e^2(KT)\}$$

c'est-à-dire la variance de l'erreur aux instants d'échantillonnage conduit (6 - pp - 16 à 26) à prendre :

$$h(t = KT) = \frac{1}{T} H_K$$

2-III. PROBLEMES D'ECHANTILLONNAGE

Il est primordial, lors de l'échantillonnage d'une fonction continue, de respecter le théorème de Shannon que nous allons rappeler :

Pour pouvoir reconstituer un signal continu à partir d'un train d'échantillons de période T_e , il faut que la pulsation d'échantillonnage $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$ soit au moins deux fois plus grande que la plus grande des pulsations contenues dans le spectre du signal qu'on échantillonne.

Pratiquement, le signal à échantillonner n'a pas un spectre limité ; on choisira ω_e largement supérieur à la pulsation de coupure du système, que l'on connaît souvent approximativement, même avant toute identification (on a toujours une bonne idée du temps de réponse du système). La durée de l'identification a elle-même de l'importance. Il est clair que si elle est inférieure à la plus grande constante de temps du système, le gain par exemple, ne pourra être identifié.

Nous allons maintenant discuter de la précision de la transformation modèle échantillonné - modèle continu - Ce qui suit est basé sur la remarque suivante : passer de la fonction de transfert en Z à la fonction de transfert en p d'un système stable revient à faire passer du cercle centré sur l'origine de rayon unité du plan Z au $1/2$ plan gauche du plan p (figure 2-6)



Figure 2-6

La région occupée par les pôles en p est beaucoup plus vaste : on peut s'attendre à avoir moins de précision quand on passe des z à p .

Considérons l'exemple suivant :

- une période d'échantillonnage de 1 s.
- une constante de temps de 10 s :

$$T_1 = 10 \text{ s} \rightarrow Z_1 = e^{-T/T_1} = 0,905$$

- une constante de temps de 20 s :

$$T_2 = 20 \text{ s} \rightarrow Z_2 = e^{-T/T_2} = 0,951$$

On voit qu'une erreur sur le paramètre discret de l'ordre de 5 % fait passer la constante de temps du simple au double.

Plus généralement, on peut écrire :

$$\frac{z}{z - a} \longrightarrow \frac{1}{p - \frac{\ln a}{T}} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

$$\tau = \frac{T}{\ln a} \quad K = - \frac{T}{\ln a}$$

$$0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ln a &< 0 \\ \ln a &= - \ln \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\frac{Z}{Z - (a + \Delta a)} \longrightarrow \frac{1}{p - \frac{\ln(a + \Delta a)}{T}} = \frac{K + \Delta K}{1 + (\tau + \Delta \tau) p}$$

regardons l'influence de l'erreur Δa du pôle en Z , a , sur la constante de temps τ du système.

$$\tau + \Delta \tau = - \frac{T}{\ln(a + \Delta a)}$$

$$\Delta \tau = \frac{T}{\ln a} - \frac{T}{\ln(a + \Delta a)} = \frac{T}{\ln a} \left(1 - \frac{\ln a}{\ln(a + \Delta a)} \right)$$

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{\ln a}{\ln(a + \Delta a)} - 1 = \frac{\ln a - \ln(a + \Delta a)}{\ln(a + \Delta a)}$$

$$= \frac{\ln a - \ln(a(1 + \Delta a/a))}{\ln(a + \Delta a)} \approx \frac{\ln a - \ln a - \Delta a/a}{\ln(a + \Delta a)}$$

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} \approx - \frac{\Delta a}{a} \frac{1}{\ln(a + \Delta a)}$$

$$\ln(a + \Delta a) < 0$$

Sur ce système, la condition de Shannon s'exprime de la façon suivante :

$$T \ll \tau$$

$$\text{ou : } T \ll \tau + \Delta \tau$$

$$\tau + \Delta \tau = - \frac{T}{\ln(a + \Delta a)}$$

$$\Rightarrow |\ln(a + \Delta a)| \ll 1$$

ce qui implique :

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} \gg \frac{\Delta a}{a}$$

Nous venons de montrer sur un exemple simple que les paramètres sont plus précis dans le plan de Z que dans le plan p . Soulignons que cette précision est nécessaire : en effet les deux fonctions de transfert ci-dessus ont la *même sortie* aux instants d'échantillonnage. Donc l'erreur sur les paramètres n'a pas la même influence selon que ce paramètre est un

pôle en Z ou un pôle en p : un pôle en Z doit être déterminé de façon plus précise qu'un pôle en p pour donner une sortie équivalente.

Nous venons de voir dans ce chapitre que le choix du modèle est en partie imposé par le choix des méthodes d'identification. Parmi les modèles discrets linéaires par rapport aux paramètres nous avons choisi celui sous forme d'équation récurrente. Le passage de ce modèle à un autre type de modèle discret ou continu est très aisé.

CHAPITRE 3

LES MOINDRES CARRES, LES MOINDRES CARRES GENERALISES

Nous allons dans un premier paragraphe étudier l'estimateur des moindres carrés, qui est sans doute le plus simple de tous, tant sur le plan théorique que sur le plan du calcul lui-même. L'étude de ses propriétés nous permettra de démontrer qu'il conduit à des estimations biaisées dans le cas du modèle que nous avons choisi. Nous verrons ensuite comment divers auteurs ont proposé d'améliorer ses performances ; nous expliquerons pourquoi nous avons choisi l'une de ces méthodes, et nous fournirons une étude expérimentale qui éclairera les divers problèmes rencontrés.

3-1. LES MOINDRES CARRES

Rappelons l'équation du modèle (2-6)

$$A(Z^{-1}) y(t) = B(Z^{-1}) u(t) + e(t)$$

ou encore :

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_0 u(t) + \dots + b_p u(t-p) + e(t)$$

où $e(t)$ représente l'erreur de prédiction du modèle.

3-1-1. Le critère et la solution

Supposons que l'on ait mesuré l'entrée et la sortie du procédé de l'instant 1 à l'instant N. On peut alors écrire:

$$\begin{aligned}
 y(N) &= -a_1 y(N-1) - \dots - a_n y(N-n) + b_0 u(N) + \dots + b_p u(N-p) + e(N) \\
 y(N-1) &= -a_1 y(N-2) - \dots - a_n y(N-n-1) + b_0 u(N-1) + \dots + b_p u(N-p-1) + e(N-1) \\
 &\vdots \\
 y(n+1) &= -a_1 y(n) - \dots - a_n y(1) + b_0 u(n+1) + \dots + b_p u(n+1-p) + e(n+1)
 \end{aligned}$$

Rappelons que $p \leq n$ pour que le système soit physiquement réalisable.

On peut écrire ces $(N-n)$ équations sous forme matricielle :

$$(3-1) \quad \begin{bmatrix} y(N) \\ y(N-1) \\ \vdots \\ y(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(N-1) \dots -y(N-n) & u(N) & \dots u(N-p) \\ -y(N-2) \dots -y(N-n-1) & u(N-1) & \dots u(N-p-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(n) \dots -y(1) & u(n+1) & \dots u(n+1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(N) \\ e(N-1) \\ \vdots \\ e(n+1) \end{bmatrix}$$

Remarquons que dans ce modèle n mesures de la sortie et $(p+1)$ mesures de l'entrée interviennent sous forme de conditions initiales et que N mesures entrée-sortie permettent d'écrire $(N-n)$ équations. Nous n'avons donc pas à supposer les conditions initiales de l'identification nulles pour utiliser cette méthode.

Nous allons écrire l'équation matricielle (3-1) sous la forme :

$$(3-2) \quad \underline{Y} = X \underline{\theta} + \underline{E}$$

où $\underline{\theta}$ est le vecteur des paramètres à estimer.

On choisit comme critère à minimiser le carré de l'erreur de prédiction :

$$C = \underline{E}^T \underline{E} = \sum_{t=n+1}^N e^2(t)$$

La borne inférieure du signe $\sum$, $n+1$ se justifie par l'hypothèse de conditions initiales quelconques. Il faut utiliser n mesures pour pouvoir calculer la sortie prédite par le modèle, et donc l'erreur de prédiction.

$$\begin{aligned} C &= \underline{E}' \underline{E} = (\underline{Y} - \underline{X} \underline{\theta})' (\underline{Y} - \underline{X} \underline{\theta}) \\ &= \underline{Y}' \underline{Y} - \underline{\theta}' \underline{X}' \underline{Y} - \underline{Y}' \underline{X} \underline{\theta} + \underline{\theta}' \underline{X}' \underline{X} \underline{\theta} \\ &= \underline{Y}' \underline{Y} - 2 \underline{Y}' \underline{X} \underline{\theta} + \underline{\theta}' \underline{X}' \underline{X} \underline{\theta} \end{aligned}$$

Calculons l'estimateur $\hat{\underline{\theta}}$ qui minimise le critère. La condition nécessaire est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \underline{\theta}} &= -2 \underline{Y}' \underline{X} + 2 \underline{\theta}' \underline{X}' \underline{X} = 0 \\ (3-3) \quad \Rightarrow \quad \underline{\hat{\theta}} &= (\underline{X}' \underline{X})^{-1} \underline{X}' \underline{Y} \end{aligned}$$

La matrice des dérivées secondes est :

$$C_{\theta\theta} = \left\{ \frac{\partial^2 C}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\} = 2 \underline{X}' \underline{X}$$

C'est une matrice définie positive, symétrique. La solution $\hat{\underline{\theta}}$ est bien un minimum.

La méthode des moindres carrés nous fournit un *estimateur explicite* des paramètres, ce qui est très avantageux sur le plan calcul. Remarquons que tout ce qui précède suppose que la matrice $\underline{X}' \underline{X}$ soit régulière.

Remarques

a) Le modèle est linéaire par rapport aux paramètres. C'est ce qui importe dans le calcul de la solution. Il pourrait représenter un système non linéaire, par exemple :

$$y(t) = a y(t-1) + b u^2(t) + e(t)$$

Il suffit pour trouver la solution (3-3) de poser :

$$X = \begin{bmatrix} y(N-1) & u^2(N) \\ \vdots & \vdots \\ y(1) & u^2(1) \end{bmatrix} \quad \underline{\theta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

b) Nous avons $n+p+1$ inconnues à déterminer (dimension du vecteur $\underline{\theta}$). Si le système n'était pas bruité, il suffirait d'écrire un système de $n+p+1$ équations et de le résoudre :

$$\begin{aligned} y_1(n+1) + a_1 y_1(n) + \dots + a_n y_1(1) &= b_0 u_1(n+1) + \dots + b_p u_1(n-p+1) \\ \vdots & \vdots \\ y_1(2n+1+p) + a_1 y_1(2n+p) + \dots + a_n y_1(n+1+p) &= b_0 u_1(2n+1+p) + \dots + b_p u_1(2n) \end{aligned}$$

A cause du bruit, on est amené à résoudre $N-n$ équations à $n+p+1$ inconnues, ceci afin d'obtenir un effet de moyennage du bruit.

c) On peut appliquer cette méthode avec une entrée $u(t)$ quelconque. En particulier, on pourrait théoriquement se contenter du bruit sur l'entrée du système (signal différent de la consigne $u(t)$ issue du calculateur) mais sa mesure est généralement impossible. Il est de plus évident qu'on a intérêt à exciter le plus possible le système, sans perturber son fonctionnement, bien sûr.

3-1-2. Les caractéristiques de l'estimateur

Rappelons que l'estimateur est dit non biaisé si :

$$E . M . \{ \hat{\underline{\theta}} \} = \underline{\theta}$$

c'est-à-dire s'il converge en moyenne vers la vraie valeur des paramètres. C'est évidemment une qualité indispensable. Cette propriété est-elle vérifiée par l'estimateur des moindres carrés ?

$$\begin{aligned}
E.M.\{\hat{\underline{\theta}}\} &= E.M.\{(X'X)^{-1}X'Y\} \\
&= E.M.\{(X'X)^{-1}X'(X\underline{\theta} + \underline{E})\} \\
&= E.M.\{(X'X)^{-1}X'X\underline{\theta} + (X'X)^{-1}X'\underline{E}\} \\
&= \underline{\theta} + E.M.\{(X'X)^{-1}X'\underline{E}\}
\end{aligned}$$

A condition que $\underline{E}$ soit non corrélié avec X et centré, c'est-à-dire :

$$E.M.\{\underline{E}\} = \underline{0}$$

alors :

$$E.M.\{\hat{\underline{\theta}}\} = \underline{\theta}$$

Calculons la matrice de covariance de l'estimateur, $\Gamma_{\theta\theta}$. Cette matrice est très intéressante puisqu'elle indique la corrélation entre chaque paramètre - éléments $\gamma_{\theta_i\theta_j}$ - et surtout la variance de chaque paramètre - éléments diagonaux $\gamma_{\theta_i\theta_i}$ - qui est une mesure de la précision de l'estimation.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\theta\theta} &= E.M.\{(\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}) . (\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta})'\} \\
&= E.M.\{(X'X)^{-1}X'\underline{E}.\underline{E}'X(X'X)^{-1}\}
\end{aligned}$$

A condition que E soit blanc de variance σ^2 , c'est-à-dire :

$$E.M.\{\underline{E}\underline{E}'\} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

On démontre (10) que :

$$(3-4) \quad \Gamma_{\theta\theta} = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

Si la variance des résidus n'est pas connue, un estimateur non biaisé est fourni par :

$$(3-5) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M-m} \hat{\underline{E}}' \hat{\underline{E}} = \frac{1}{M-m} (\underline{Y} - X\hat{\underline{\theta}})' (\underline{Y} - X\hat{\underline{\theta}})$$

où M et m sont les dimensions de la matrice X , c'est-à-dire respectivement :

$$M = N - n$$

$$m = n + p + 1$$

$\hat{\underline{E}}$ représente l'estimation des résidus par le modèle.

3-1-3. Comparaison avec les méthodes de corrélation

L'autocorrélation de signaux discrets stationnaires $u(j)$ et $y(j)$ s'exprime de la façon suivante :

$$\Gamma_{uu}(K) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u(j)u(j+K) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(j)u(j-K)$$

$$\Gamma_{yy}(K) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y(j)y(j+K)$$

K, j sont des entiers.

L'intercorrélation est :

$$\Gamma_{yu}(K) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y(j)u(j+K) = \Gamma_{uy}(-K)$$

Explicitons les matrices $X'X$ et $X'Y$ de la formule (3-3)

$$X'X = \begin{bmatrix} -y(N-1) \dots -y(n) \\ -y(N-n) \dots -y(1) \\ u(N) \dots u(n+1) \\ \vdots \\ -y(n) \dots -y(1)u(n+1) \dots u(n+1-p) \\ u(N-p) \dots u(n+1-p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -y(N-1) \dots -y(N-n)u(N) \dots u(N-p) \\ \vdots \\ -y(n) \dots -y(1)u(n+1) \dots u(n+1-p) \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} \sum_{t=n}^{N-1} y^2(t) & \sum_{t=n}^{N-1} y(t)y(t-1) \dots & \sum_{t=n}^{N-1} y(t)u(t+1) \dots & \sum_{t=n}^{N-1} y(t)u(t+1-p) \\ \sum_{t=n-1}^{N-2} y^2(t) & \dots & \sum_{t=n-1}^{N-2} y(t)u(t+2) \dots & \sum_{t=n-1}^{N-2} y(t)u(t+2-p) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sum_{t=n+1}^N u^2(t) & \dots & \sum_{t=n+1}^N u(t)u(t-p) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sum_{t=n+1-p}^{N-p} u^2(t) & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccccc}
 \Gamma_{yy}(0) & \Gamma_{yy}(1) & \dots & \Gamma_{yy}(n-1) & -\Gamma_{uy}(-1) & -\Gamma_{uy}(0) & \dots & -\Gamma_{uy}(p-1) \\
 & \Gamma_{yy}(0) & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & \Gamma_{yy}(0) & -\Gamma_{uy}(-n) & & & -\Gamma_{uy}(p-n) \\
 & & & & \Gamma_{uu}(0) & & & \Gamma_{uu}(p) \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & \Gamma_{uu}(0) & \Gamma_{uu}(1) \\
 & & & & & & & \Gamma_{uu}(0)
 \end{array} \right] \\
 & = (N-n)
 \end{aligned}$$

On trouve de la même façon :

$$X'Y = (N-n) \begin{bmatrix} -\Gamma_{yy}(1) \\ -\Gamma_{yy}(2) \\ \vdots \\ -\Gamma_{yy}(n) \\ \Gamma_{uy}(0) \\ \Gamma_{uy}(1) \\ \vdots \\ \Gamma_{uy}(p) \end{bmatrix}$$

Les matrices $X'X$ et $X'Y$ peuvent donc s'exprimer facilement à partir des corrélations des signaux d'entrée et de sortie. A partir d'une détermination expérimentale de ces corrélations, on pourrait trouver facilement la solution des moindres carrés.

3-1-4. Interprétation géométrique (II)

Considérons l'équation :

$$\underline{Y} = X \underline{\theta} + \underline{E}$$

que l'on peut exprimer de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} y(N) \\ \vdots \\ y(n+1) \end{bmatrix} - \theta_1 \begin{bmatrix} -y(N-1) \\ \vdots \\ -y(n) \end{bmatrix} - \dots - \theta_{n+p+1} \begin{bmatrix} u(N-p) \\ \vdots \\ u(n+1-p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(N) \\ \vdots \\ e(n+1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y} - \theta_1 \underline{X}_1 - \theta_2 \underline{X}_2 - \dots - \theta_{n+p+1} \underline{X}_{n+p+1} = \underline{E}$$

Considérons dans l'espace à $N-n$ dimensions les vecteurs $\underline{Y}$, $\underline{X}_1$, ..., $\underline{X}_{n+p+1}$ et la norme :

$$||\underline{X}_i|| = \underline{X}_i' \underline{X}_i$$

Le problème des moindres carrés peut être interprété de la façon suivante : trouver un vecteur $\underline{Y}^*$, combinaison linéaire des vecteurs $\underline{X}_1$, ..., $\underline{X}_{n+p+1}$, tel que la norme du vecteur $\underline{Y} - \underline{Y}^*$ soit minimale. La solution de ce problème est bien connue : $\underline{Y}^*$ est la projection orthogonale de $\underline{Y}$ dans l'espace engendré par $\underline{X}_1$, ..., $\underline{X}_{n+p+1}$. Alors le vecteur $\underline{Y} - \underline{Y}^*$ est orthogonal à tous les $\underline{X}_1$, ..., $\underline{X}_{n+p+1}$ et l'on peut écrire :

$$(\underline{Y} - \underline{Y}^*)' \underline{X}_1 = 0$$

$$(\underline{Y} - \underline{Y}^*)' \underline{X}_{n+p+1} = 0$$

avec $\underline{Y}^* = \theta_1 \underline{X}_1 + \dots + \theta_{n+p+1} \underline{X}_{n+p+1}$

Le système précédent est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_1' \underline{X}_1 & \underline{X}_1' \underline{X}_2 & \dots & \underline{X}_1' \underline{X}_{n+p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{X}_{n+p+1}' \underline{X}_1 & \underline{X}_{n+p+1}' \underline{X}_2 & \dots & \underline{X}_{n+p+1}' \underline{X}_{n+p+1} \end{bmatrix} \underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{Y}' \underline{X}_1 \\ \vdots \\ \underline{Y}' \underline{X}_{n+p+1} \end{bmatrix}$$

qui est identique à :

$$(X'X) \underline{\theta} = X'Y$$

Si les vecteurs $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_{n+p+1}$ ne sont pas indépendants, la solution $\underline{\theta}$ n'est pas unique. Ceci correspond à la condition de non inversion de la matrice $X'X$.

3-1-5. Caractérisation

Nous avons vu que c'est l'étape qui permet de choisir un modèle particulier. Le type de modèle pour lequel nous avons opté exige la connaissance de deux données : le retard pur R du système, et son ordre n . La détermination du retard pur ne pose pas de grand problème, sa valeur est facilement déduite d'un enregistrement quelconque des entrées-sorties. Il n'en va pas de même pour n . Le choix est délicat. Vraisemblablement les systèmes industriels très complexes sont d'un ordre élevé, peut être même infini si le procédé est à constantes réparties. On peut dans ce cas difficilement parler de l'ordre du système lui-même. Ceci n'empêche pas que parmi les divers modèles approchant son fonctionnement, il en est un qui réalise au mieux le compromis précision-simplicité. Nous pouvons citer l'exemple de M. GILLES, du Laboratoire d'Automatique de Grenoble, qui a été conduit, après divers essais, tant d'identification que de commande, à attribuer au modèle de l'échangeur thermique qu'il étudiait, l'ordre 1. Il est bien évident qu'un échangeur n'est pas un système comportant un seul intégrateur puisque c'est un système à constantes réparties, donc d'ordre infini.

On peut cependant réfléchir à l'influence de l'ordre du modèle : plus celui-ci est élevé, et plus on a de chance de trouver une combinaison de paramètres qui donne une sortie semblable à la sortie du système. Mais ces paramètres seront peu précis ; de plus un modèle trop complexe est un modèle inutilisable et donc sans intérêt. Vraisemblablement, le critère va diminuer au fur et à mesure que l'ordre du modèle va

augmenter. A partir de quel moment cette diminution cesse-t-elle d'être intéressante ? Certains auteurs préconisent des tests statistiques sur le critère (11- pp. 20-23). Mais d'une part ces tests exigent des hypothèses restrictives sur le bruit (bruit gaussien en particulier), d'autre part certains auteurs avouent avoir eu des résultats erronés malgré ces tests (12-p. 6). Nous verrons plus loin comment nous conseillons de résoudre le problème. Signalons toutefois que la détermination de p est nettement plus simple que celle de n . En effet, l'allure de la sortie est moins sensible à sa valeur qu'à celle de n , et de plus, on peut s'aider des valeurs relatives des paramètres b_i pour juger si l'entrée à l'instant $(t-1)$ a de l'influence sur la sortie à l'instant t .

Nous allons nous contenter ici de regarder sur le plan théorique ce qui se passe quand l'ordre du modèle est supérieur à l'ordre du système, que nous supposerons égal à n . Supposons encore pour simplifier l'écriture que $p=n$.

Si le système n'est pas bruité, on a :

$$(3-6) \quad y(t) + \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^n b_i u(t-i)$$

on cherche les paramètres a_{iM} et b_{iM} du modèle supposé d'ordre $n+1$, c'est-à-dire tel que :

$$y(t) + \sum_{i=1}^{n+1} a_{iM} y(t-i) = \sum_{i=0}^{n+1} b_{iM} u(t-i) + e(t)$$

La matrice X de l'équation (3-2) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -y(N-1) & \dots & -y(N-n-1) & u(N) & \dots & u(N-n-1) \\ -y(N-2) & \dots & -y(N-n-2) & u(N-1) & \dots & u(N-n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(n+1) & \dots & -y(1) & u(n+2) & \dots & u(1) \end{bmatrix}$$

La sortie du système à l'instant $N-1$, $y(N-1)$ vérifie d'après (3-6)

$$y(N-1) + a_1 y(N-2) + \dots + a_n y(N-n-1) = 0. u(N) + b_0 u(N-1) + \dots + b_n u(N-1-n)$$

Donc $y(N-1)$, terme de la première ligne et de la première colonne de la matrice X , est combinaison linéaire des autres termes apparaissant sur la première ligne. Il en va de même pour toutes les autres lignes de la matrice. La première colonne de X est en dépendance linéaire des autres. En conséquence, la matrice $X'X$ présente la même particularité.

Si le système n'est pas bruité, un modèle d'ordre trop élevé se traduit par une matrice $X'X$ non inversible. Ceci pourrait être un bon test. Généralement hélas, on a du bruit en sortie du système, ce qui fait que cette propriété n'est plus vérifiée (car l'équation (3-6) ne l'est plus : il faut ajouter un terme relatif au bruit).

3-11. LE BIAIS DE L'ESTIMATEUR. LES SOLUTIONS PROPOSEES

Lors de l'étude des propriétés statistiques de l'estimateur (3-1-2), nous avons dû exiger deux conditions :

- $\underline{E}$ centré
- $\underline{E}$ non corrélié avec X .

Les éléments du vecteur $\underline{E}$ sont les résidus $e(t)$. Nous avons vu (2-1-2-b - équations (2-11) - (2-12)) que les résidus pouvaient toujours être considérés comme centrés, grâce à l'adjonction d'un paramètre supplémentaire à l'équation du modèle si ce n'est pas le cas. La première des hypothèses est donc toujours vérifiée.

Par contre, nous savons que (2-7) :

$$e(t) = A(Z^{-1}) b(t)$$

Le résidu est donc toujours corrélié par l'intermédiaire de $A(Z^{-1})$.

Nous allons prendre un exemple simple pour éclairer la question. Soit un système du premier ordre :

$$v(t) + \alpha v(t-1) = \beta u(t-1)$$

$$y(t) = v(t) + b(t)$$

où $v(t)$ est la sortie déterministe du système et $y(t)$ la mesure entachée d'un bruit blanc centré $b(t)$

$$E.M.\{b(t)\} = 0$$

$$E.M.\{b(t).b(t-\tau)\} = \lambda^2 \delta(\tau)$$

$$y(t) + \alpha y(t-1) = \beta u(t-1) + b(t) + \alpha b(t-1)$$

$$y(t) + \alpha y(t-1) = \beta u(t-1) + e(t)$$

$$E.M.\{e(t)\} = E.M.\{b(t) + \alpha b(t-1)\}$$

$$= E.M.\{b(t)\} + \alpha E.M.\{b(t-1)\}$$

$$= 0$$

$$\Gamma_{ee}(\tau) = E.M.\{e(t) . e(t+\tau)\}$$

$$= E.M.\{(b(t)+\alpha b(t-1))(b(t+\tau)+\alpha b(t+\tau-1))\}$$

$$= E.M.\{b(t).b(t+\tau)+\alpha b(t+\tau)b(t-1)+\alpha b(t)b(t+\tau-1) + \alpha^2 b(t-1)b(t+\tau-1)\}$$

$$= \lambda^2 \delta(\tau) + \alpha \lambda^2 \delta(-\tau-1) + \alpha \lambda^2 \delta(\tau-1) + \alpha^2 \lambda^2 \delta(\tau)$$

La courbe $\Gamma_{ee}(\tau)$ est reportée figure 3-1

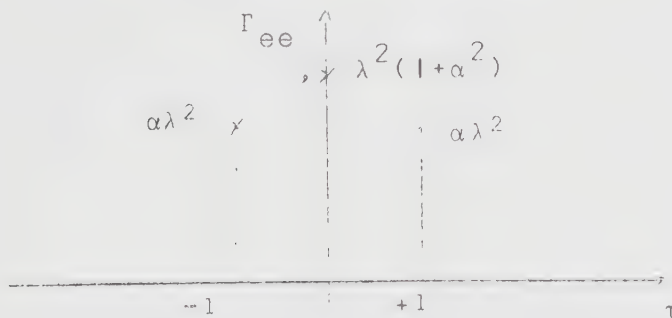


Figure 3-1

Le résidu $e(t)$ n'est pas blanc mais corrélié. Il est corrélié avec $y(t-1)$ puisque :

$$e(t) = b(t) + \alpha b(t-1)$$

$$y(t-1) = v(t-1) + b(t-1)$$

Les matrices X et E s'écrivent dans ce cas particulier :

$$X = \begin{bmatrix} -y(N-1) & u(N-1) \\ -y(N-2) & u(N-2) \\ \vdots & \vdots \\ -y(1) & u(1) \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} b(N) + \alpha b(N-1) \\ b(N-1) + \alpha b(N-2) \\ \vdots \\ b(2) + \alpha b(1) \end{bmatrix}$$

Elles sont donc corréliées.

De façon plus générale, on sait que :

$$e(t) = A(Z^{-1}) b(t)$$

Les résidus sont corréliés entre eux. Il intervient dans l'expression de $e(t)$ des termes en $b(t-1)$, ..., $b(t-n)$ et sur la ligne correspondante de la matrice X on trouve les termes $y(t-1)$, ..., $y(t-n)$ qui sont fonction de $b(t-1)$, ..., $b(t-n)$. Donc en conclusion, avec le modèle que nous avons choisi, *la corrélation est inévitable*. L'estimateur $\hat{\theta}$ obtenu par la méthode des moindres carrés est *toujours biaisé*. La non corrélation ne peut être respectée que si le résidu $e(t)$ est blanc. L'hypothèse de bruit en sortie du système $b(t)$ blanc n'est pas suffisante.

Remarque :

La méthode des moindres carrés peut être utilisée à la détermination de la séquence de pondération. Le modèle est (2-3) :

$$v(K) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j u(K-j+1)$$

avec : $u(K-j+1) = 0 \quad K-j+1 < 0$

qui se réduit, grâce à l'hypothèse de système à mémoire finie, à :

$$v(K) = \sum_{j=1}^M H_j u(K-j+1)$$

Une séquence de N mesures entrée-sortie conduit au système matriciel

$$\underline{Y} = U \underline{H} + \underline{B}$$

avec $y(K) = v(K) + b(K)$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_M \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u(N) & \dots & u(N-M+1) \\ \vdots & & \vdots \\ u(M) & \dots & u(1) \end{bmatrix}$$

système dont la solution qui minimise $\underline{B}'\underline{B}$ est :

$$\hat{\underline{H}} = (U'U)^{-1} U'\underline{Y}$$

Cette méthode a été appliquée par CLARKE, HAMMOND et BRIGGS, qui utilisent une entrée en séquence binaire pseudo-aléatoire, ce qui simplifie beaucoup les calculs (13). Si l'on exprime les matrices $U'U$ et $U'\underline{Y}$ en fonction des corrélations des signaux, on trouve que la solution :

$$(U'U) \hat{\underline{H}} = U'\underline{Y}$$

est équivalente à :

$$r_{uy}(K) = \sum_{j=1}^M H_j r_{uu}(K-j+1)$$

$$K = 1, \dots, M$$

qui est l'équation de WIENER-HOPF.

Dans le cas de ce modèle, puisqu'on suppose l'entrée non bruitée, la matrice X est déterministe et l'estimateur des

moindres carrés n'est pas biaisé. Nous tenons à souligner que ce problème de biais est un problème dû au modèle choisi plus qu'à la méthode elle-même.

La solution du problème des moindres carrés présente tout de même l'énorme avantage d'être explicite et fort simple à mettre en oeuvre. Le seul problème numérique peut provenir de l'inversion de la matrice $X'X$. Or celle-ci a pour dimensions $(n+p+1) \times (n+p+1)$. Pour un système d'ordre 4 (ce qui est déjà beaucoup) avec $p = p_{\text{maximum}} = n = 4$, on doit inverser une matrice de 9×9 , ce qui n'est pas très élevé. De plus, le fait que cette matrice soit symétrique simplifie encore les calculs (on trouve une étude détaillée de ces problèmes d'inversion dans (6) - pp. 35-38). Il serait donc dommage d'abandonner cette méthode et c'est pourquoi plusieurs automaticiens ont cherché un moyen d'aboutir à des résidus blancs par transformation des données. L'idée de base de leur recherche est la suivante : il faut déterminer un filtre qui "blanchisse" les résidus, c'est-à-dire tel que, $e(t)$ étant l'entrée de ce filtre, la sortie $\xi(t)$ soit un bruit blanc (figure 3-2).

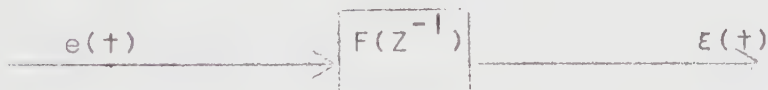


Figure 3-2

$$F(Z^{-1}) e(t) = \xi(t)$$

Il suffit ensuite de "filtrer" l'équation (3-2)

$$\underline{Y} = \underline{X} \underline{\theta} + \underline{E}$$

c'est-à-dire en fait filtrer les données pour obtenir un problème des moindres carrés ayant pour résidu $\xi(t)$ et donc une solution non biaisée. On peut illustrer ce principe par les schémas de la figure 3-3.

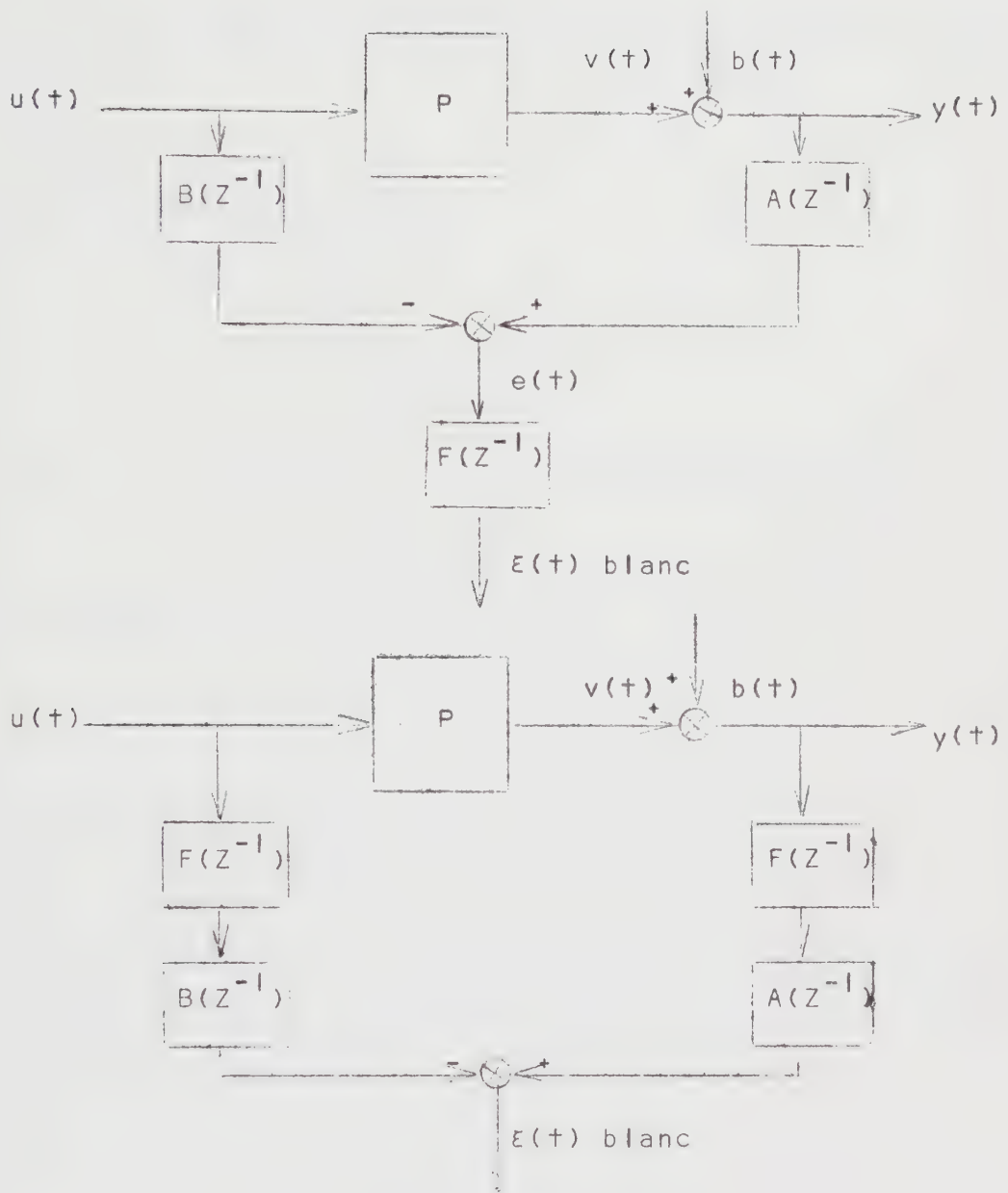


Figure 3-3

La permutation des filtres A , B et F est possible parce que le système est linéaire. L'opération de la figure 3-3 revient à écrire :

$$\begin{aligned}
 A(Z^{-1}) y(t) &= B(Z^{-1}) u(t) + e(t) \\
 F(Z^{-1}) A(Z^{-1}) y(t) &= F(Z^{-1}) B(Z^{-1}) u(t) + F(Z^{-1}) e(t) \\
 A(Z^{-1}) y^*(t) &= B(Z^{-1}) u^*(t) + \varepsilon(t)
 \end{aligned}$$

Nous allons passer rapidement en revue les diverses techniques de filtrage que nous avons pu trouver dans la littérature.

3-11-1. Estimateur de MARKOV

Le modèle étant :

$$\underline{Y} = X \underline{\theta} + \underline{E}$$

le critère minimisé par l'estimateur des moindres carrés est :

$$C = \underline{E}' \underline{E}$$

Si l'on utilise un critère pondéré :

$$C' = \underline{E}' W \underline{E}$$

l'estimateur déterminé est :

$$\hat{\underline{\theta}} = (X' W X)^{-1} X' W Y$$

Supposons que les résidus soient corrélés entre eux et non corrélés avec X ; supposons de plus que l'on connaisse les propriétés statistiques des résidus :

$$E.M. \{ \underline{E} \} = \underline{0}$$

$$E.M. \{ \underline{E} \underline{E}' \} = R$$

on démontre (14) que la covariance de l'estimateur :

$$E.M. \{ (\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta})(\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta})' \} = X' W X$$

est minimale pour $W = R^{-1}$

L'estimateur est appelé estimateur de Markov :

$$\hat{\underline{\theta}} = (X' R^{-1} X)^{-1} X' R^{-1} Y$$

R est une matrice symétrique, définie positive, que l'on peut mettre sous la forme :

$$R = Q \cdot Q'$$

Q étant une matrice triangulaire régulière.

Filtrons les données par la matrice Q^{-1} (15) ;
l'équation

$$\underline{Y} = X \underline{\theta} + \underline{E}$$

devient :

$$Q^{-1} \underline{Y} = Q^{-1} X \underline{\theta} + Q^{-1} \underline{E}$$

$$\underline{Y}^* = X^* \underline{\theta} + \underline{E}^*$$

$$\hat{\underline{\theta}} = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} \underline{Y}^*$$

$$\hat{\underline{\theta}} = (X' Q'^{-1} Q^{-1} X)^{-1} X' Q'^{-1} Q^{-1} \underline{Y}$$

$$\hat{\underline{\theta}} = (X' R^{-1} X)^{-1} X' R^{-1} \underline{Y}$$

On retrouve par moindres carrés simples sur les données filtrées l'estimateur à variance minimale. De plus :

$$\begin{aligned} E.M.\{\underline{E}^* \underline{E}^{*'}\} &= E.M.\{Q^{-1} \underline{E} \underline{E}' Q'^{-1}\} \\ &= Q^{-1} R Q'^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

Le filtrage des données par la matrice Q^{-1} conduit à un modèle avec des résidus blancs, et il n'y a plus de problème de biais. Ce filtre est donc idéal. Mais pour le déterminer il faut connaître la covariance des résidus, et pour connaître cette covariance, il faudrait connaître non seulement la covariance du bruit en sortie $b(t)$, mais encore les paramètres du système puisque :

$$e(t) = A(Z^{-1}) b(t)$$

Cette méthode n'est donc pas applicable directement, mais elle nous permet de cerner le problème. Ce filtre idéal que l'on ne peut connaître, il faut essayer de le déterminer pratiquement.

3-11-2. Méthode de K. STEIGLITZ et L.E. Mc BRIDE (16)

Le critère des moindres carrés est basé sur une erreur de prédiction. Le but de STEIGLITZ et Mc BRIDE était de passer de ce critère prédictif C à un critère C_2 fonction quadratique de l'erreur sortie procédé moins sortie modèle

$$C = \sum_{t=n+1}^N e^2(t)$$

$$C_2 = \sum_{t=n+1}^N \left(y(t) - \frac{B(Z^{-1})}{A(Z^{-1})} u(t) \right)^2$$

car la sortie du modèle à l'instant t est bien :

$$y_M(t) = \frac{B(Z^{-1})}{A(Z^{-1})} u(t)$$

Remarquons que si le procédé est correctement caractérisé et identifié, alors :

$$C_2 = \sum_{t=n+1}^N (y(t) - v(t))^2 = \sum_{t=n+1}^N b^2(t)$$

(cf. 2-1-2- figure 2-1)

La solution proposée est la suivante :

- une première estimation des moindres carrés fournit les polynômes $A_1(Z^{-1})$ et $B_1(Z^{-1})$

- on filtre les données par $\frac{1}{A_1(Z^{-1})}$

$$y^*(t) = \frac{y(t)}{A_1(Z^{-1})}$$

$$u^*(t) = \frac{u(t)}{A_1(Z^{-1})}$$

donc le critère devient :

$$C' = \sum_{t=n+1}^N (A(Z^{-1}) y^*(t) - B(Z^{-1}) u^*(t))^2$$

$$= \sum_{t=n+1}^N \left(\frac{A(Z^{-1})}{A_1(Z^{-1})} y(t) - \frac{B(Z^{-1})}{A_1(Z^{-1})} u(t) \right)^2$$

$$C' = C_2 \quad \text{si} \quad A(Z^{-1}) = A_1(Z^{-1})$$

c'est-à-dire si la première identification est correcte. Si non, on peut itérer le processus de filtrage un certain nombre de fois. Alors, le critère n'est plus $\sum_{t=n+1}^N e^2(t)$ mais tend à devenir $\sum_{t=n+1}^N b^2(t)$. On voit donc que l'optique de STEIGLITZ et Mc BRIDE pourrait servir dans notre cas si le bruit sur le système est blanc. On aurait alors :

$$\underline{Y} = \underline{X} \underline{\theta} + \underline{E}$$

$$\underline{E} = A(Z^{-1}) \underline{B}$$

$$\underline{Y}^* = \frac{1}{A(Z^{-1})} \underline{Y} \quad \underline{X}^* = \frac{1}{A(Z^{-1})} \underline{X}$$

$$\underline{E}^* = \frac{1}{A(Z^{-1})} \underline{E} = \underline{B}$$

Les résidus sont blanchis par cette procédure. Mais cette technique n'est pas générale puisqu'on ne peut espérer obtenir de bons résultats que si le bruit en sortie du système est blanc, ce qui est rarement le cas quand c'est un bruit interne ramené à la sortie.

3-11-3. Méthode de CLARKE : Moindres carrés généralisés (17)

Etudions le modèle discret d'un générateur de bruit corrélé $b(t)$:



Figure 3-4

Le modèle le plus classique est celui où $b(t)$ est la sortie d'un procédé dont l'entrée est un bruit blanc $\xi(t)$ (figure 3-4). La façon la plus générale de décrire ceci est :

$$C(Z^{-1}) b(t) = D(Z^{-1}) \xi(t)$$

avec :

$$C(Z^{-1}) = 1 + c_1 Z^{-1} + \dots + c_n Z^{-n}$$

$$D(Z^{-1}) = d_0 + d_1 Z^{-1} + \dots + d_p Z^{-p}$$

$$p \leq n$$

Les racines de $C(Z^{-1})$ sont intérieures au cercle unité dans le plan des Z (système stable).

Le système représenté figure 2-1 peut s'exprimer sous la forme de la figure 3-5

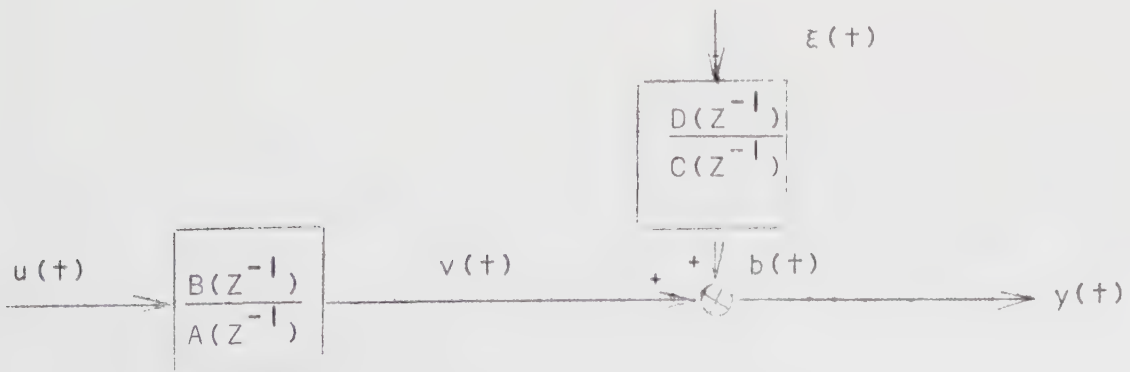


Figure 3-5

Nous avons (cf. 2-5)

$$A(Z^{-1})y(t) = B(Z^{-1})u(t) + A(Z^{-1})b(t)$$

$$A(Z^{-1})y(t) = B(Z^{-1})u(t) + \frac{A(Z^{-1})D(Z^{-1})}{C(Z^{-1})} \varepsilon(t)$$

$$A(Z^{-1})y(t) = B(Z^{-1})u(t) + e(t)$$

Le filtre de blanchiment théorique est donc :

$$F(Z^{-1}) = \left(\frac{A(Z^{-1}) \cdot D(Z^{-1})}{C(Z^{-1})} \right)^{-1}$$

puisque nous avons posé :

$$F(Z^{-1})e(t) = \varepsilon(t)$$

où $\varepsilon(t)$ est un bruit blanc.

On voit que dans la méthode de STEIGLITZ et Mc BRIDE on prenait :

$$F(Z^{-1}) = A^{-1}(Z^{-1})$$

ce qui impliquait pour que ce filtre soit le filtre idéal que :

$$\frac{C(Z^{-1})}{D(Z^{-1})} = 1$$

c'est-à-dire : $b(t) = \varepsilon(t)$

Le bruit sur le système devait être blanc.

L'approche de CLARKE est plus générale. Il propose de déterminer expérimentalement le filtre $F(Z^{-1})$, de la façon suivante : on approche ce filtre par un développement en série d'ordre q :

$$F(Z^{-1}) = 1 + f_1 Z^{-1} + \dots + f_q Z^{-q}$$

Le modèle des résidus est :

$$F(Z^{-1}) e(t) = \xi(t)$$

c'est-à-dire :

$$(3-7) \quad e(t) + f_1 e(t-1) + \dots + f_q e(t-q) = \xi(t)$$

Ce modèle est appelé autorégressif.

Ecrivons que l'équation (3-7) est réalisée aux divers instants d'échantillonnage :

$$\begin{array}{rcl} e(N) + f_1 e(N-1) + \dots + f_q e(N-q) & = & \xi(N) \\ e(N-1) + f_1 e(N-2) + \dots + f_q e(N-q-1) & = & \xi(N-1) \\ \vdots & & \vdots \\ e(q+1) + f_1 e(q) + \dots + f_q e(1) & = & \xi(q+1) \end{array}$$

que l'on écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} e(N) \\ e(N-1) \\ \vdots \\ e(q+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e(N-1) & \dots & -e(N-q) \\ -e(N-2) & \dots & -e(N-q-1) \\ \vdots & & \vdots \\ -e(q) & \dots & -e(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi(N) \\ \xi(N-1) \\ \vdots \\ \xi(q+1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{E} = X_E \underline{f} + \underline{\xi}$$

Nous reconnaissons-là un problème dont la solution des moindres carrés est :

$$(3-8) \quad \underline{f} = (X_E' X_E)^{-1} X_E' \underline{E}$$

Comme $\xi(t)$ est un bruit blanc, l'estimateur n'est pas biaisé. Donc, lorsqu'on est en possession des résidus, la

détermination du filtre est aisée. Restent à estimer les résidus, puisque ce ne sont pas des grandeurs mesurables. On peut le faire à partir du modèle :

$$\underline{\hat{E}} = \underline{Y} - X \underline{\hat{\theta}}$$

où $\underline{\hat{\theta}}$ est une première estimation des paramètres obtenue par moindres carrés simples. Comme l'estimation du filtre se fait avec $\underline{\hat{E}}$ et non $\underline{E}$, et que $\underline{\hat{E}}$ est biaisé dans la mesure où $\underline{\hat{\theta}}$ l'est, il faut itérer le processus plusieurs fois. CLARKE n'a pu donner aucune démonstration de convergence de la méthode, mais déclare n'avoir eu aucun problème lors de ses essais. C'est aussi notre cas.

Résumons la méthode :

1. un premier calcul fournit l'estimateur des moindres carrés

$$\underline{\hat{\theta}}_1 = (X'X)^{-1} X' \underline{Y}$$

2. on estime alors les résidus :

$$\underline{\hat{E}}_1 = \underline{Y} - X \underline{\hat{\theta}}_1$$

et on construit la matrice X_{E1} ; on calcule alors le filtre

$$\underline{f}_1 = (X'_{E1} X_{E1})^{-1} X'_{E1} \underline{\hat{E}}_1$$

3. on filtre les données :

$$y^*(t) = y(t) + f_1 y(t-1) + \dots + f_q y(t-q)$$

$$u^*(t) = u(t) + f_1 u(t-1) + \dots + f_q u(t-q)$$

et on considère les ensembles $\{u^*(t)\}$, $\{y^*(t)\}$ comme les données d'un nouveau problème. On calcule donc :

$$\underline{\hat{\theta}}_2 = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} \underline{Y}^*$$

et on itère.

Soit s le nombre d'itérations et $F_i(Z^{-1})$ le filtre obtenu au $i^{\text{ème}}$ pas de calcul. Le filtre global appliqué est :

$$F(Z^{-1}) = \prod_{i=1}^s F_i(Z^{-1})$$

Si q est l'ordre des filtres $F_i(Z^{-1})$, l'ordre de $F(Z^{-1})$ est $q \times s$. Si l'on choisit par exemple a priori $q = 2$, $F(Z^{-1})$ sera forcément d'ordre pair. Une façon d'obtenir un filtre $F(Z^{-1})$ très général est de choisir $q = 1$. Il n'y a alors aucune contrainte sur l'ordre de $F(Z^{-1})$ qui dépend uniquement du nombre s d'itérations, lui-même fixé par la qualité de l'estimation (cf. 3-III-2).

Une autre remarque s'impose : si l'on possède N mesures, au premier pas de calcul, la matrice X aura $N-n$ lignes puisque n valeurs sont nécessaires pour initialiser le calcul. (cf. 3-I-1). Le vecteur $\hat{E}$ aura donc $N-n$ composantes, dont q sont nécessaires à l'initialisation de l'équation (3-7) q valeurs des entrée-sortie sont nécessaires à l'initialisation du filtrage (prise en compte des valeurs initiales) :

$$y^*(q+1) = y(q+1) + f_1 y(q) + \dots + f_q y(1)$$

On perd ainsi q données à chaque pas. Cette remarque incite donc à choisir q le plus faible possible. Nous avons personnellement pris $q = 1$ dans tous nos essais. Soulignons qu'alors la matrice X_E se réduit à un vecteur et le calcul de (3-8) est grandement simplifié.

Nous venons de montrer dans ce paragraphe que la technique la plus générale de décorrélation des résidus est celle proposée par CLARKE. C'est celle que nous avons choisi d'expérimenter. Il nous a paru intéressant d'étudier le filtre $F(Z^{-1})$, étude que nous n'avons pour notre part jamais rencontrée au cours de notre recherche bibliographique. Nous

avons vu que la convergence de la méthode n'a pas été démontrée: pour être sûr de ses performances, nous avons fait de nombreux essais, que nous allons présenter dans le paragraphe suivant. Nous en profiterons pour comparer avec la méthode des moindres carrés seule et voir les améliorations que l'on peut attendre du filtrage.

3-III. RESULTATS EXPERIMENTAUX

3-III-1. Programmes de simulation

Tous nos résultats ont été obtenus numériquement sur le calculateur IBM 360/67 de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble ; nos programmes ont été écrits en langage FORTRAN ; nous avons utilisé au maximum les possibilités de la bibliothèque fortran IBM : Scientific Subroutine Package, S.S.P., en particulier pour tout calcul matriciel (addition, produit, inversion - nous avons utilisé la méthode bien connue de GAUSS-JORDAN pour l'inversion d'une matrice symétrique - ...). Cette présentation permet une lecture aisée des programmes. Nous avons de plus donné une forme très générale à nos programmes : l'utilisateur se contente de fournir la liste de ses données entrée-sortie et les valeurs qu'il désire attribuer aux paramètres n , p (ordre) et R (retard pur) ($n \leq 10$; $p \leq 10$; $R \leq 10$). L'entrée des données n , p , R se fait sous forme conversationnelle grâce au système de time-sharing CP/CMS qui est accessible actuellement sur le terminal du Laboratoire d'Automatique. Un utilisateur éventuel peut donc se servir facilement de nos programmes, quel que soit le système qu'il veut identifier, sans connaître en détail le texte lui-même du programme.

Les données que nous avons utilisées pour nos essais sont obtenues numériquement par simulation d'une équation aux différences.

Nous avons simulé deux types d'équation :

- a) une équation qui correspond au fonctionnement du système étudié (cf 2-1-2 ; figure 2-1)

$$(3-9) \quad \begin{cases} v(t) + \sum_{i=1}^n a_i v(t-i) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i) \\ y(t) = v(t) + b(t) \end{cases}$$

Les résidus sont alors donnés par :

$$e(t) = A(Z^{-1}) b(t)$$

Le bruit $b(t)$ est issu d'un bruit blanc $\xi(t)$ par la transformation :

$$b(t) = G_1(Z^{-1}) \xi(t)$$

Les résidus $e(t)$ sont corrélés par le filtre : $A(Z^{-1})G_1(Z^{-1})$; $G_1(Z^{-1})$ peut être le filtre identité ($G_1(Z^{-1}) = 1$).

Nous dirons par la suite que dans cette équation le bruit $b(t)$ est additif. Nous préciserons $G_1(Z^{-1})$ si ce polynôme est différent de 1.

- b) une équation qui simule non plus le fonctionnement du procédé, mais le modèle utilisé :

$$(3-10) \quad y(t) + \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i) + e(t)$$

Simuler cette équation permet une grande liberté dans le choix de la corrélation de $e(t)$. En effet, $e(t)$ est issu du bruit blanc $\xi(t)$ par :

$$e(t) = G_2(Z^{-1}) \xi(t)$$

Le polynôme $G_2(Z^{-1})$ est équivalent au polynôme $A(Z^{-1}) \cdot G_1(Z^{-1})$ du paragraphe a) précédent, mais il est indépendant de $A(Z^{-1})$, donc du système simulé. En

particulier, on peut choisir $G_2(Z^{-1}) = 1$. Dans ce cas, les résidus sont blancs, ce qui nous permet de vérifier certaines propriétés des méthodes étudiées.

Nous parlerons dans le cas de simulation de l'équation (3-10) de bruit indépendant, et préciserons $G_2(Z^{-1})$ quand ce polynôme sera différent de 1.

Le bruit $\varepsilon(t)$ blanc que nous avons utilisé nous a été fourni par les sousroutines GAUSS et RANDU du S.S.P.

- Le bruit obtenu en sortie de GAUSS est un bruit gaussien dont on fixe la valeur moyenne et la variance. La courbe 3-1 reproduit ce bruit dans le cas où la valeur moyenne est nulle et l'écart type unitaire.
- Le bruit obtenu en sortie de RANDU est un bruit uniformément réparti entre 0 et 1. C'est donc un bruit de valeur moyenne:

$$B_0 = \int_0^1 x \cdot dx = \frac{1}{2}$$

et de variance :

$$\sigma^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = 0,29$$

La courbe 3-2 reproduit ce bruit.

L'entrée utilisée est une séquence binaire pseudo-aléatoire, de longueur maximale, de niveau ± 1 .

3-III-2. Test d'arrêt du filtrage

Le programme des moindres carrés généralisés imprime dans la boucle d'itération le critère défini en 3-I-1 :

$$C = \sum_{t=n+1}^N e^2(t)$$

Ce critère définit l'erreur de prédiction du modèle. Il est

calculé, au premier pas, avec les données mesurées :

$$\underline{E} = \underline{Y} - \underline{X} \underline{\theta}_1$$

$$C = \underline{E}' \underline{E}$$

et à la $i^{\text{ème}}$ itération, à partir des données filtrées :

$$\underline{E}^* = \underline{Y}^* - \underline{X}^* \underline{\theta}_i$$

$$C = \underline{E}^{*'} \underline{E}^*$$

Ce critère diminue quand le nombre d'itérations augmente, c'est-à-dire au fur et à mesure que le filtre estimé se rapproche du filtre idéal. Nous avons choisi d'arrêter le processus calcul du filtre-filtrage des données-calcul de l'estimateur lorsque la diminution relative du critère de l'itération i à l'itération $i+1$ est inférieure à 3 %. Cette borne est arbitraire, mais divers essais nous l'on faite juger convenable.

D'autres solutions s'étaient présentées à notre esprit :

- Fixer le nombre s d'itérations a priori ; mais ce procédé nous a paru trop arbitraire ;
- Arrêter le déroulement du programme lorsque le paramètre f_i déterminé à l'itération i devient petit (rappelons que nous avons choisi de déterminer à chaque pas un filtre à un seul coefficient). Mais petit devant quoi ?
- Un test séduisant est parfois proposé dans la littérature : le filtrage a pour but de transformer le résidu corrélié $e(t)$ en bruit blanc $\varepsilon(t)$. On peut calculer la corrélation des résidus et la tracer afin de voir si elle présente ou non l'allure d'une impulsion de DIRAC. Nous avons essayé d'appliquer cette méthode, mais les résultats obtenus ne nous ont pas satisfaits. Il nous a semblé difficile de conclure sur l'efficacité du filtrage en se basant uniquement sur l'allure de ces courbes.

Le critère final obtenu est le critère de prédiction du modèle calculé avec les données filtrées. Il ne correspond donc pas effectivement à l'erreur de prédiction du modèle, définie par :

$$\begin{aligned}\underline{E} &= \underline{Y} - \underline{X} \underline{\theta}_{\text{MCG}} \\ C &= \underline{E}' \underline{E}\end{aligned}$$

où $\underline{\theta}_{\text{MCG}}$ représente la solution des moindres carrés généralisés, le vecteur final des paramètres.

Nous avons comparé C_{MC} le critère de prédiction obtenu avec l'estimateur des moindres carrés et C_{MCG} , celui obtenu avec l'estimateur des moindres carrés généralisés. On constate que :

$$C_{\text{MC}} < C_{\text{MCG}}$$

Donc l'erreur de prédiction, définie en (2-10) est minimisée par l'estimateur des moindres carrés. Il n'y a là rien de surprenant puisque c'est la définition de cet estimateur (3-1-1)

Ceci nous permet de mettre en évidence l'importance du choix du critère : le critère de prédiction est minimisé par un estimateur biaisé, c'est donc un mauvais critère. *Il est plus important d'être assuré de la convergence de l'estimateur vers les vrais valeurs des paramètres, ce qui revient en fait à étudier une distance de structure, que de minimiser un critère dont le choix risque de ne pas être très heureux.*

La variance des résidus peut être estimée par la formule (3-5) :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M-m} \underline{\hat{E}}' \underline{\hat{E}} = \frac{1}{M-m} C$$

avec :

$$\begin{aligned}M &= N-n \\ m &= n+p+1\end{aligned}$$

Nous donnerons dans nos tableaux de résultats la variance estimée avec la solution des moindres carrés $\underline{\theta}_{MC}$ et celle estimée avec la solution des moindres carrés généralisés $\underline{\theta}_{MCG}$.

La comparaison des deux résultats permet de tester l'efficacité du filtrage. En effet, reportons-nous à la figure 3-3 :

- la variance estimée avec $\underline{\theta}_{MC}$ est celle des résidus corrélés $e(t)$
- la variance estimée avec $\underline{\theta}_{MCG}$ doit être celle de $\xi(t)$, bruit blanc, si le filtre a été correctement estimé.

Lors de nos simulations, nous fixons la variance du bruit $\xi(t)$ issu des sousroutines GAUSS ou RANDU et utilisé dans les équations (3-9) ou (3-10). Si la variance estimée avec $\underline{\theta}_{MCG}$ est proche de celle de $\xi(t)$, nous pourrions conclure que le filtre a bien transformé les résidus corrélés $e(t)$ en bruit blanc $\xi(t)$.

Soulignons ici qu'à la constante N-m près, le critère et la variance des résidus ont la même valeur. On trouve donc un critère d'autant plus élevé que le bruit appliqué sur le système est important. Un critère élevé indique donc qu'il y a beaucoup de bruit sur le système, et n'implique pas que l'identification soit mauvaise.

La variance du vecteur $\underline{\theta}_{MCG}$ est la diagonale de la matrice $\Gamma_{\theta\theta}$ estimée par la formule (3-4)

$$\Gamma_{\theta\theta} = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

Cette formule est valable si les résidus sont indépendants. Nous avons donc calculé sa valeur en fin de filtrage.

Nous présenterons ce résultat sous la forme :

$$\theta_{i,MCG} = \theta_i \pm \Delta\theta_i$$

avec $\Delta\theta_i = (\Gamma_{\theta\theta})_{i,i}^{1/2}$

Nous ne donnerons pas cette précision dans les tableaux relatifs à la comparaison des méthodes des moindres carrés et des moindres carrés généralisés puisque le calcul n'est possible qu'avec l'estimateur des moindres carrés généralisés. Nous les fournirons lors de la comparaison des méthodes (chapitre 6) afin de comparer cette précision avec celle obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance.

3-111-3. Résultats de caractérisation

Nous disions au début de ce chapitre (3-1-5) que ce problème était délicat. C'est même là le défaut principal du modèle utilisé. Nous avons cherché ce qui pourrait guider le choix de l'ordre n_0 optimal à attribuer au modèle. Si le système étudié est un système d'ordre fini et peu élevé, n_0 coïncide avec l'ordre du système.

Pour étudier le comportement du modèle en fonction de l'ordre qu'on lui attribue, nous avons identifié un système d'ordre 2 ($n_0=2$) avec des modèles d'ordre n croissant, et porté sur une courbe le critère en fonction de n (courbe 3-3). On remarquera sur cette courbe que si les valeurs du critère sont très différentes en fonction du niveau de bruit, la cassure lorsqu'on atteint $n = n_0$ est dans chaque cas très nette. L'allure de ces courbes est identique pour d'autres systèmes. Elle est assez facile à expliquer. Tant que le modèle n'a pas assez de degrés de liberté, il lui est impossible de prédire une sortie correcte. Quand il en a trop, il peut toujours trouver une combinaison linéaire des valeurs qu'on lui donne qui fournisse un résultat convenable.

Nous expliquons dans le paragraphe 3-1-5 que dans le cas de système non bruité, la matrice $(X'X)$ permettant le calcul de la solution 3-3 n'est pas inversible. Pratiquement, il y a toujours un bruit sur le système, et aussi faible qu'il soit, les colonnes de $X'X$ sont linéairement indépendantes. Ce test n'est donc pas concluant pour choisir le paramètre n_0 .

Par contre, nous avons pu observer plusieurs phénomènes lorsque le modèle a un ordre trop élevé, qui peuvent aider à choisir n_0 .

- a) Le filtre déterminé quand $n \gg n_0$ est négligeable. Par exemple, pour un système d'ordre 2, $n_0 = 2$, lors de la recherche d'un modèle d'ordre $n = 4$ (9 paramètres au lieu de 5) tout se passe comme si les résidus étaient blancs. Nous expliquons ceci de la façon suivante : le résidu $e(t)$ est l'erreur de prédiction du modèle ; lorsque ce modèle est identique au système, on a (2-7) :

$$e(t) = A(Z^{-1}) b(t)$$

c'est-à-dire que $e(t)$ tient compte uniquement du bruit, et est fortement corrélé avec $y(t)$, $y(t-1)$... d'où nécessité de filtrage ; par contre, quand le modèle et le système sont très différents, $e(t)$ tient compte uniquement de l'erreur sur le modèle ; la part due au bruit est négligeable. Il est alors fort peu corrélé avec la sortie du système $y(t)$.

- b) La précision de l'estimation est moins bonne lorsque le modèle est d'ordre trop élevé. La variance des paramètres devient plus grande, lors du passage de $n = n_0$ à $n = n_0 + 1$. Ceci est logique puisque ce modèle est moins bon. Ce test est facilement applicable.
- c) Une autre indication sur l'ordre à attribuer au modèle peut être fournie par les valeurs numériques des paramètres. Si a_n est très faible devant $a_1, \dots, a_{n-1}$, on peut conclure que $y(t-n)$ intervient très peu sur la sortie $y(t)$, donc que vraisemblablement $n_0 = n-1$.

Nous avons parlé jusqu'à présent de l'influence de l'ordre n , et non de l'influence de p , nombre relatif à l'entrée. Celui-ci conditionne beaucoup moins l'allure de la sortie ; les tests que nous avons adoptés pour son choix sont les

tests b et c ci-dessus, qui ont toujours été assez concluants.

Nous présentons une étude détaillée de la caractérisation d'un système chapitre 7 (7-11-2), qui réunit sur un même exemple à peu près tous les indices signalés ici.

Nous concluons ce paragraphe en soulignant que toutes les indications ci-dessus sont très empiriques. Le problème de la caractérisation d'un système ne se pose pas en termes mathématiques. C'est plutôt une question d'intuition qui fait appel au bon sens plutôt qu'à la rigueur d'une démonstration.

3-III-4. Etudes expérimentale du filtre - Comparaison des moindres carrés et des moindres carrés généralisés

Il nous a semblé intéressant, puisque la convergence de l'estimateur des moindres carrés généralisés vers les paramètres du système n'a pu être démontrée, d'entreprendre une étude expérimentale approfondie du filtre $F(Z^{-1})$. Ceci nous a permis de montrer que le filtre estimé par cette méthode présente bien les caractéristiques du filtre théorique de blanchiment.

Cette étude permet d'autre part de se rendre compte de l'amélioration apportée par la méthode de CLARKE par rapport à la méthode des moindres carrés.

Nous présenterons les résultats sous forme de tableaux organisés comme le tableau 3-0.

θ	θ_{MC}	θ_{MCG}
a_1		
$\vdots$		
a_n		
b_0		
$\vdots$		
b_p		
σ_ε		

Tableau 3-0

La colonne θ représente le vecteur des paramètres à estimer $a_i (i = 1, \dots, n)$, $b_i (i = 0, \dots, p)$ σ_ε est l'écart-type du bruit blanc utilisé pour la simulation (cf. 3-III-1). Rappelons que si le filtrage est efficace, l'écart-type du bruit estimé doit être identique à σ_ε .

On trouve sur chaque ligne, dans la colonne θ_{MC} la valeur du paramètre estimée par les moindres carrés et dans la colonne θ_{MCG} celle estimée par les moindres carrés généralisés.

Nous indiquons au-dessous du tableau la valeur de $F(Z^{-1})$

Nous donnons presque toujours les résultats obtenus sur le même système. Nous n'avons changé d'un exemple à l'autre que les caractéristiques du bruit. Ceci nous semble la façon la plus claire de montrer l'influence propre à chacune de ces caractéristiques.

Exemple 3-1

L'équation simulée est du type (3-10)

$$\begin{cases} y(t) - 1,5 y(t-1) + 0,7 y(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) + e(t) \\ e(t) = \xi(t) \end{cases}$$

$\xi(t)$ bruit blanc, gaussien, centré, d'écart-type $\sigma_{\xi} = 0,9$.
Nous avons utilisé $N = 200$ données. Les résultats sont reportés tableau 3-1.

θ	θ_{MC}	θ_{MCG}
- 1,5	- 1,51	- 1,53
0,7	0,70	0,71
0	0,09	0,09
1	1,00	0,99
0,5	0,57	0,57
0,9	0,94	0,94

$$F(Z^{-1}) = 1 - 0,09 Z^{-1}$$

Tableau 3-1

Nous vérifions sur ce tableau que les résultats obtenus par les deux méthodes sont pratiquement identiques lorsque les résidus ne sont pas corrélés.

Le filtre déterminé est négligeable.

Exemple 3-2

L'équation simulée est du type 3-10

$$\begin{cases} y(t) - 1,5 y(t-1) + 0,7 y(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) + e(t) \\ e(t) = (1 - Z^{-1} + 0,2 Z^{-2}) \xi(t) = G_2(Z^{-1}) \xi(t) \end{cases}$$

$\xi(t)$: blanc, gaussien, centré d'écart-type 0,9
 $N = 200$ données.

Les résultats sont reportés tableau 3-2

θ	e_{MC}	e_{MCG}
- 1,5	-1,23	- 1,47
0,7	0,45	0,68
0	-0,02	0,08
1	0,92	0,85
0,5	0,83	0,67
0,9	1,32	1,03

$$F(Z^{-1}) = 1 + 0,98 Z^{-1} + 0,34 Z^{-2} + 0,04 Z^{-3} + 0,002 Z^{-4}$$

Tableau 3-2

Le but de cet exemple est de vérifier que lorsque les résidus sont corrélés par $G_2(Z^{-1})$ le filtre déterminé est

$$F(Z^{-1}) = \frac{1}{G_2(Z^{-1})}.$$

Le calcul donne :

$$F(Z^{-1}) \cdot G_2(Z^{-1}) = 1 - 0,2 Z^{-1} - 0,46 Z^{-2} - 0,1 Z^{-3} + 0,03 Z^{-4}$$

On peut donc constater que le filtre obtenu au bout de 4 itérations (le degré de $F(Z^{-1})$ est 4) n'est pas tel que

$$F(Z^{-1}) \cdot G_2(Z^{-1}) = 1$$

Cette divergence ne s'explique pas par un nombre d'itérations insuffisant, puisque le coefficient du terme Z^{-3} de $F(Z^{-1})$ est déjà négligeable. Nous pensons plutôt qu'elle est due au fait que le filtre théorique à déterminer est :

$$F(Z^{-1}) = \frac{1}{G_2(Z^{-1})}$$

Le développement en série de $\frac{1}{G_2(Z^{-1})}$ comporte une infinité de termes, que l'on approche par une série finie de 4 termes. Il est donc difficile de vérifier que les deux séries sont équivalentes.

Ce qu'il faut remarquer, c'est que l'écart-type estimé avec $\hat{\theta}_{MCG}$ est de 1,03, donc très proche de l'écart-type du bruit blanc σ_ξ . On peut conclure que le résidu obtenu par la méthode des moindres carrés généralisés est proche du bruit blanc $\xi(t)$, donc que $F(Z^{-1})$ est proche de la transformation Inverse de $G_2(Z^{-1})$.

On peut faire encore une remarque après l'examen de ce tableau. Le résidu est donné par :

$$e(t) = (1 - Z^{-1} + 0,2 Z^{-2}) \xi(t)$$

sa variance est donc :

$$\sigma_e^2 = (1 + (-1)^2 + (0,2)^2) \sigma_\xi^2 = 2,04$$

L'écart-type estimé par la méthode des moindres carrés devrait être 1,43 ; on le trouve égal à 1,32. La différence provient de l'erreur sur les paramètres $\hat{\theta}_{MC}$, qui ne sont pas égaux à ceux du système.

Exemple 3-3

L'équation simulée est du type (3-9)

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) - 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = \xi(t), \end{array} \right.$$

$\xi(t)$: blanc, gaussien, centré

Le résidu $e(t)$ est alors corrélié par $A(Z^{-1})$

$$e(t) = A(Z^{-1}) \varepsilon(t)$$

N : 100 données.

Cet exemple a pour but de montrer que le filtre déterminé dépend de la corrélation des résidus, et non de sa variance. L'équation a été simulée dans trois cas :

$$\sigma_{\varepsilon} = 0,9 \quad ; \quad \sigma_{\varepsilon} = 0,45 \quad ; \quad \sigma_{\varepsilon} = 0,09$$

Les résultats sont reportés tableau 3-3

θ	θ_{MC}	θ_{MCG}
- 1,5	- 1,19	- 1,45
0,7	0,41	0,66
0	0,07	0,13
1	0,79	0,70
0,5	1,03	0,86
0,9	1,45	1,14
- 1,5	- 1,39	- 1,48
0,7	0,60	0,69
0	0,03	0,06
1	0,88	0,86
0,5	0,73	0,67
0,45	0,8	0,59
- 1,5	- 1,49	- 1,50
0,7	0,69	0,70
0	0,005	0,01
1	0,97	0,97
0,5	0,53	0,53
0,09	0,167	0,12

$$F(Z^{-1}) = 1 + 1,16Z^{-1} + 0,48Z^{-2} + 0,07Z^{-3} + 0,005Z^{-4}$$

$$F(Z^{-1}) = 1 + 1,24Z^{-1} + 0,53Z^{-2} + 0,08Z^{-3} + 0,005Z^{-4}$$

$$F(Z^{-1}) = 1 + 1,30Z^{-1} + 0,57Z^{-2} + 0,08Z^{-3} + 0,006Z^{-4}$$

Tableau 3-3

On vérifie effectivement sur ce tableau 3-3 que les filtres déterminés dans chacun des cas sont semblables.

Une autre constatation s'impose : dans le cas de niveau de bruit très faible ($\sigma_\xi = 0,09$) les estimateurs $\hat{\theta}_{MC}$ et $\hat{\theta}_{MCG}$ sont presque identiques ; le filtrage n'apporte pas d'amélioration (même corrélé, le bruit a peu d'influence). Malgré cela, un filtre est déterminé, semblable à ceux des autres cas. Les moindres carrés généralisés fournissent une connaissance plus approfondie du procédé, ce qui n'est pas négligeable, même si le but final de l'identification est la détermination des valeurs numériques des paramètres.

Exemple 3-4

L'équation simulée est du type (3-9)

$$\begin{aligned} v(t) &= 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) \\ y(t) &= v(t) + b(t) \\ b(t) &= \xi(t) \end{aligned}$$

$\xi(t)$: blanc, gaussien, centré, d'écart-type 0,9

Le but de cet exemple est la vérification de l'invariance du filtre en fonction du nombre de données. Les résultats sont reportés tableaux 3-4-a ($N = 100$) et 3-4-b ($N=200$)

θ	$\hat{\theta}_{MC}$	$\hat{\theta}_{MCG}$
-1,5	-1,19	-1,45
0,7	0,41	0,66
0	0,07	0,13
1	0,79	0,70
0,5	1,03	0,86
0,9	1,45	1,14

Tableau 3-4a

θ	$\hat{\theta}_{MC}$	$\hat{\theta}_{MCG}$
-1,5	-1,03	-1,46
0,7	0,26	0,66
0	-0,07	0,05
1	0,91	0,83
0,5	1,05	0,73
0,9	1,58	1,14

Tableau 3-4b

$$F(Z^{-1}) = 1 + 1,16Z^{-1} + 0,48Z^{-2} + 0,07Z^{-3} + 0,005Z^{-4}$$

$$F(Z^{-1}) = 1 + 1,4Z^{-1} + 0,76Z^{-2} + 0,14Z^{-3} + 0,02Z^{-4} + 0,001Z^{-5}$$

On peut remarquer sur les tableaux 3-4a et 3-4b que les filtres déterminés à partir de 100 données et de 200 données sont assez proches. De plus le filtre déterminé avec 200 données est plus proche de celui déterminé avec 100 données et $\sigma_{\xi} = 0,09$ (tableau 3-3c) que de celui déterminé avec 100 données et $\sigma_{\xi} = 0,9$ - or le filtre déterminé dans le cas de bruit faible est vraisemblablement meilleur. On constate ici que l'augmentation du nombre de données améliore $\underline{\theta}_{MCG}$, mais pas $\underline{\theta}_{MC}$.

Remarquons encore que le filtrage améliore surtout les paramètres a_i (ce sont ceux relatifs à la sortie, qui est seule perturbée par le bruit). D'autre part, on constate que certains paramètres sont moins bons après filtrage (par exemple les paramètres b_0 et b_1 du tableau 3-4). Ceci est dû, à notre avis, au fait que le vecteur $\underline{\theta}$ est traité dans son ensemble, et non terme à terme. Il peut se produire que θ_i ne soit pas amélioré, mais globalement, l'estimateur est meilleur après filtrage.

Exemple 3-5

L'équation simulée est du type (3-9)

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) - 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = \xi(t) \end{array} \right.$$

Le but de cet exemple est de vérifier l'invariance du filtre en fonction de la nature du bruit. Nous avons donc simulé l'équation en utilisant :

$\xi_a(t)$: blanc, gaussien, centré, d'écart-type 0,09

$\xi_b(t)$: blanc, uniformément réparti entre 0 et 1 : $\sigma_{\xi_b} = 0,3$

$N = 100$ données.

Les résultats sont reportés tableaux 3-5a et 3-5b

θ	θ_{MC}	θ_{MCG}
-1,5	-1,49	-1,50
0,7	0,69	0,70
0	0,005	0,01
1	0,97	0,97
0,5	0,53	0,53
0,09	0,167	0,12

Tableau 3-5a

θ	θ_{MC}	θ_{MCG}
-1,5	-1,42	-1,50
0,7	0,63	0,70
0	0,03	-0,04
1	1,04	1,09
0,5	0,63	0,46
0,3	0,55	0,36

Tableau 3-5b

$$F(Z^{-1}) = 1 + 1,30Z^{-1} + 0,57Z^{-2} + 0,08Z^{-3} + 0,006Z^{-4}$$

$$F(Z^{-1}) = 1 + 1,39Z^{-1} + 0,66Z^{-2} + 0,11Z^{-3} + 0,009Z^{-4}$$

On constate effectivement sur ces tableaux que les filtres déterminés dans les deux cas sont semblables, compte tenu de la précision de la détermination du filtre que nous avons pu observer jusqu'ici.

Exemple 3-6

L'équation utilisée est du type (3-10)

Nous avons simulé avec cette équation deux procédés différents, mais ayant les mêmes résidus. Le but de cet exemple est de montrer que le filtre déterminé est uniquement fonction des résidus, et non de la nature du système. Nous avons utilisé 200 données.

Le premier système est :

$$\begin{aligned} & y(t) - 1,5y(t-1) + 0,7y(t-2) = u(t-1) + 0,5u(t-2) + e(t) \\ (a) \quad & e(t) = (1 - Z^{-1} + 0,2Z^{-2} + 0,2Z^{-3})\varepsilon(t) = G_2(Z^{-1})\varepsilon(t) \end{aligned}$$

Le second :

(b)
$$\begin{cases} y(t)-1,855y(t-1)+0,86y(t-2) = 0,09u(t-1)+e(t) \\ e(t) = (1-z^{-1}+0,2z^{-2}+0,2z^{-3})\xi(t) = G_2(z^{-1})\xi(t) \end{cases}$$

Dans les deux cas $\xi(t)$ est un bruit blanc, gaussien, centré, d'écart-type 0,9 dans le premier cas et 0,3 dans le second.

Les résultats sont reportés tableaux 3-6a et 3-6b

	θ	θ_{MC}	θ_{MCG}
3-6a	-1,5	-1,21	-1,46
	0,7	0,42	0,66
	0	0,04	0,08
	1	0,91	0,84
	0,5	0,87	0,72
	0,9	1,28	1,05
	~~-----~~		
	-1,855	-1,26	-1,82
	0,86	0,27	0,82
	0,09	0,08	0,09
3-6b	0,3	0,36	0,31

$$F(Z^{-1}) = 1+1,02Z^{-1}+0,37Z^{-2}+0,05Z^{-3}+0,003Z^{-4}$$

$$F(Z^{-1}) = 1+0,99Z^{-1}+0,40Z^{-2}+0,05Z^{-3}+0,005Z^{-4}$$

Tableau 3-6

L'identité des deux filtres est remarquable. Nous avons eu quelques difficultés à prouver que $F(Z^{-1}) = \frac{1}{G_2(Z^{-1})}$ (exemple 3-2). On peut cependant se rendre compte sur l'exemple 3-6 qu'il en est une bonne approximation puisqu'à partir de données obtenues sur deux systèmes totalement différents, n'ayant en commun que les résidus, on retrouve le même résultat.

Exemple 3-7

Nous avons voulu terminer ce chapitre sur un exemple qui montre jusqu'à quel point on peut améliorer les résultats des moindres carrés par la technique de filtrage proposée par CLARKE.

L'équation simulée est du type (3-9)

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) - 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = (1-0,5 Z^{-1}) \xi(t) = G_1(Z^{-1}) \xi(t) \end{array} \right.$$

$\xi(t)$: blanc, gaussien, centré, d'écart-type 0,9
N = 200 données.

Les résidus sont fortement corrélés

$$\begin{aligned} e(t) &= (1 - 1,5Z^{-1} + 0,7Z^{-2})(1 - 0,5Z^{-1}) \xi(t) \\ &= (1 - 2Z^{-1} + 1,45Z^{-2} - 0,35Z^{-3}) \xi(t) \end{aligned}$$

Les résultats sont reportés tableau 3-7

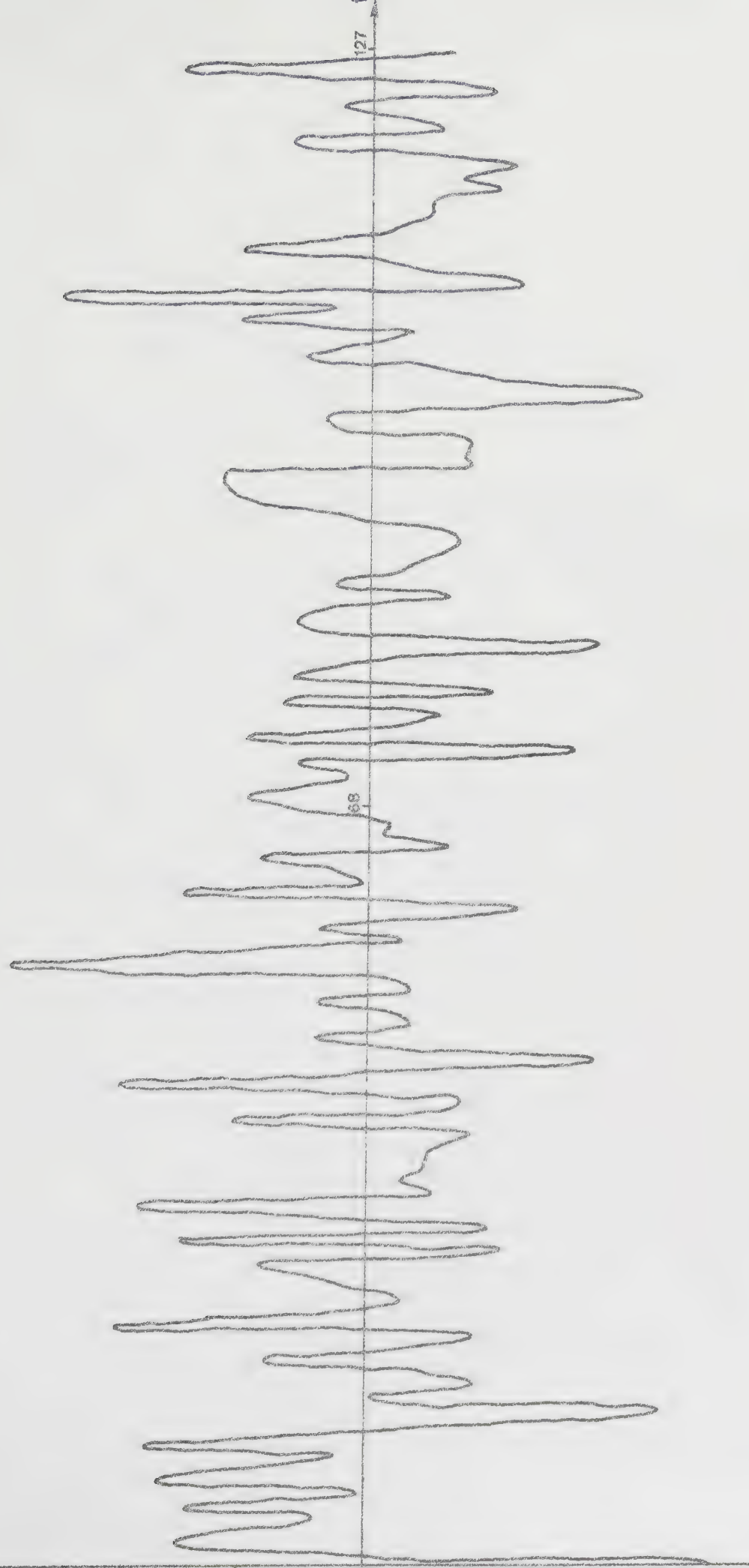
θ	θ_{MC}	θ_{MCG}
- 1,5	- 0,80	- 1,47
0,7	0,04	0,67
0	- 0,11	- 0,01
1	0,88	0,92
0,5	1,28	0,66
0,9	1,95	1,25

Tableau 3-7

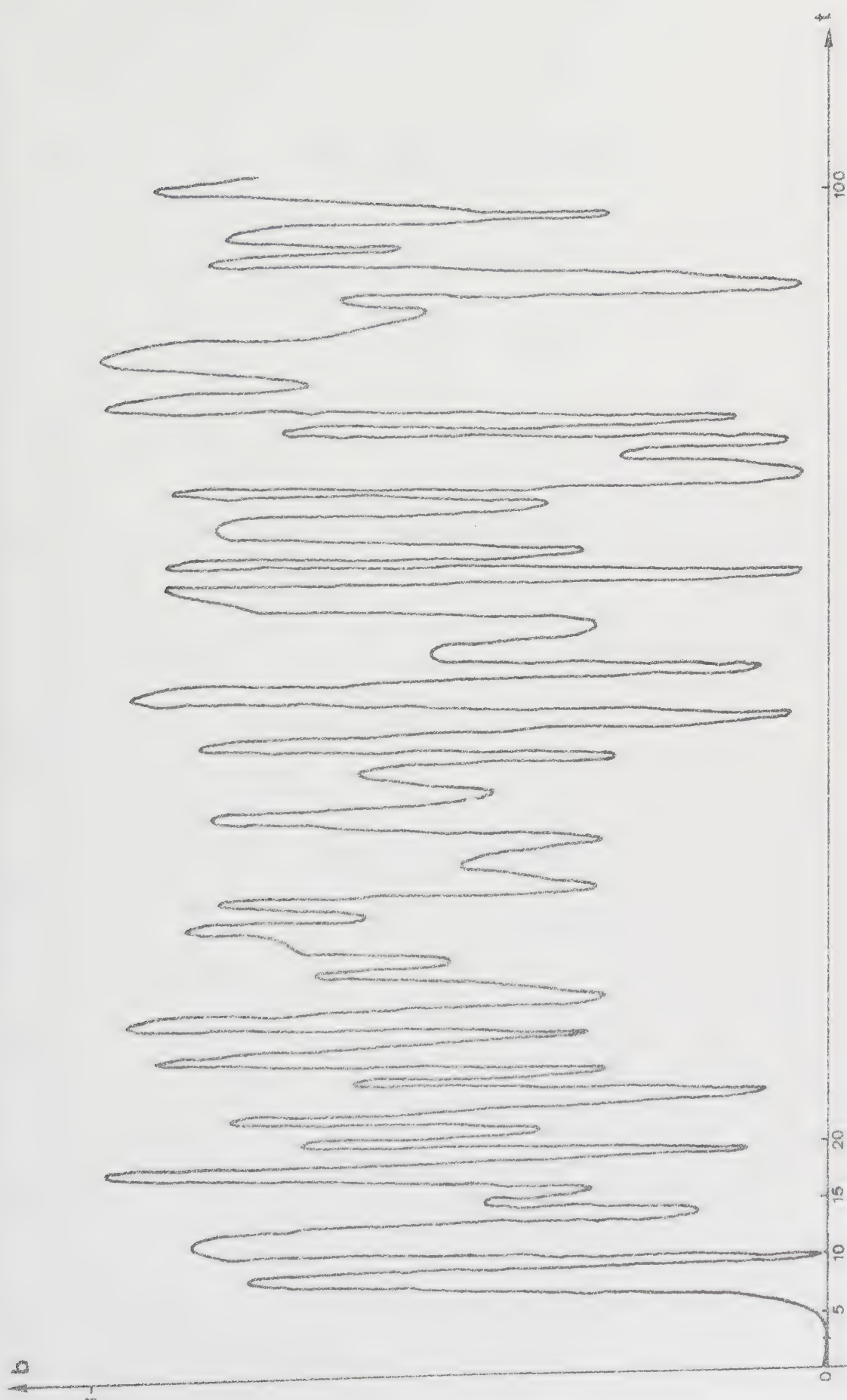
Il a fallu 7 itérations pour arriver à ce résultat, mais cela en valait la peine !

Nous avons montré, à travers divers exemples, que bien que n'ayant pas de support théorique approfondi, la méthode des moindres carrés généralisés est efficace et que le filtre générateur de bruit que détermine cette méthode se comporte bien comme on peut le prévoir. Nous retiendrons surtout que si dans le cas de bruit très faible ou très peu corrélié, la méthode des moindres carrés donne de bons résultats, cependant, dès que le bruit devient important, le filtrage est nécessaire si l'on ne veut pas obtenir des paramètres fortement biaisés. Insistons encore sur le fait que le programme des moindres carrés généralisés n'est pas plus difficile à mettre en oeuvre que celui des moindres carrés et guère plus long lorsque le filtre déterminé à chaque itération est d'ordre 1 (83 cartes pour les moindres carrés, 130 pour les moindres carrés généralisés).

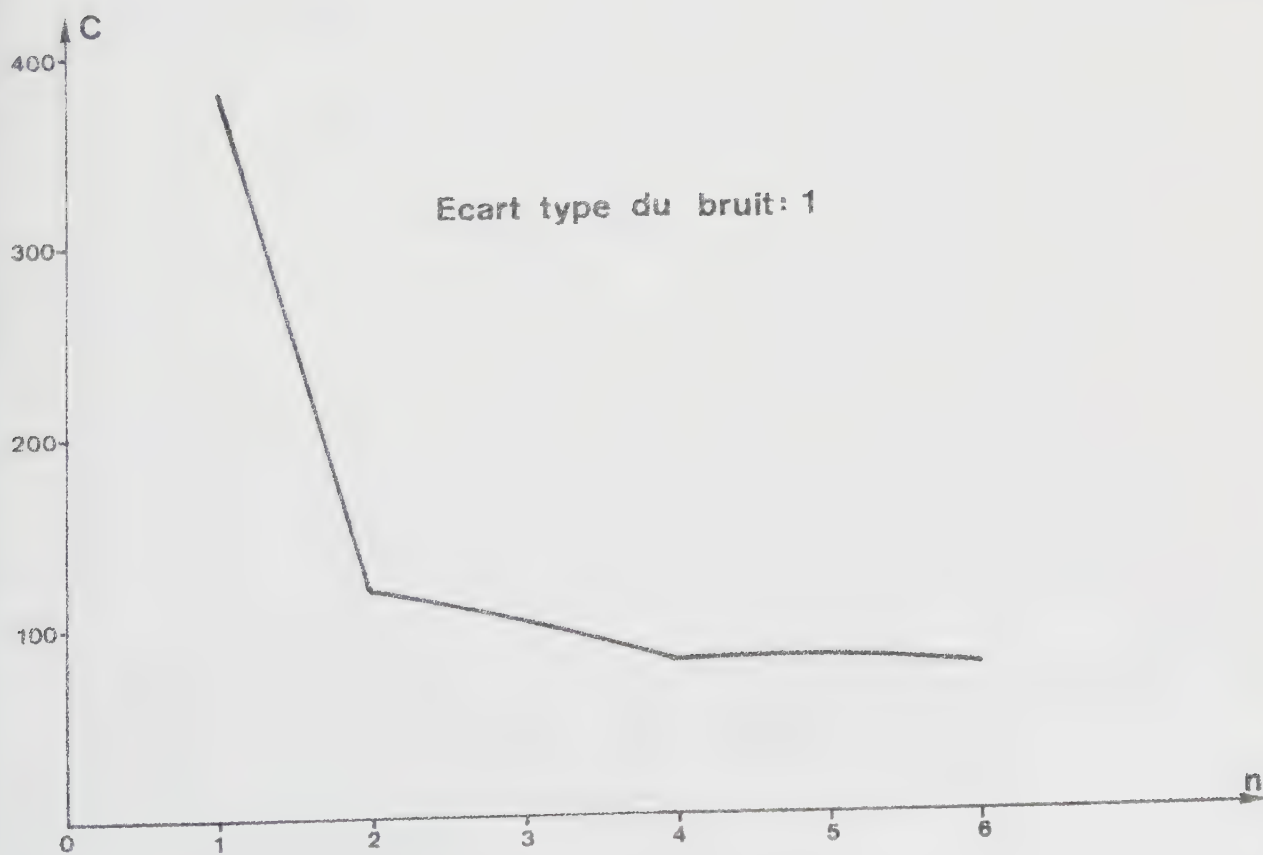
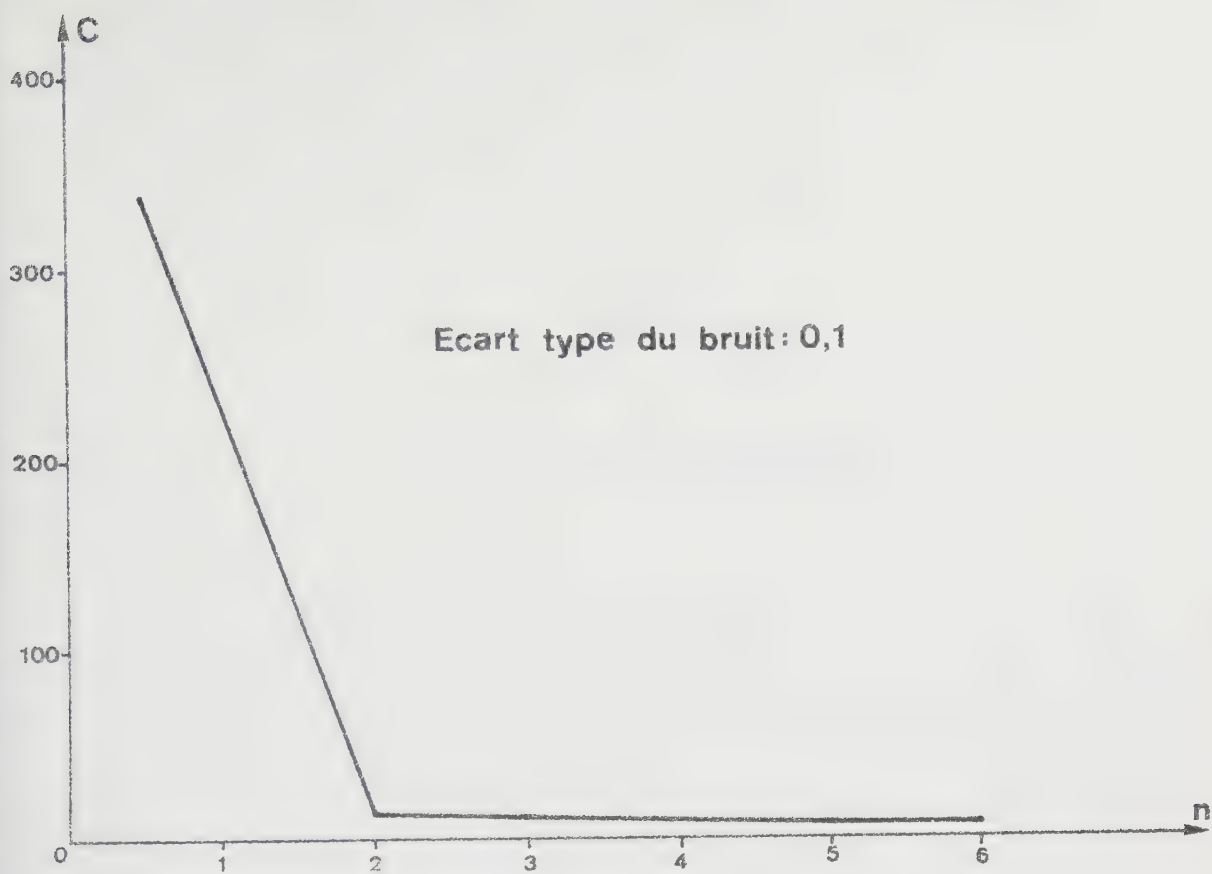
En conclusion, la méthode des moindres carrés généralisés est nettement plus performante que celle des moindres carrés. Dans le chapitre 6 consacré aux comparaisons des méthodes, nous ne parlerons plus de cette dernière.



Courbe 3.1: Bruit gaussien centré de variance unitaire



Courbe 3.2 : Bruit uniformément réparti entre 0 et 1



Courbe 3.3: Courbe de caractérisation: méthode des moindres carrés généralisés

CHAPITRE 4

LA MATRICE INSTRUMENTALE

Nous avons dans le précédent chapitre largement détaillé la méthode des moindres carrés. Le lecteur est maintenant familier avec les problèmes soulevés par l'identification avec le modèle choisi au chapitre 2. Notre Etude de la méthode de la matrice instrumentale sera beaucoup plus succincte.

Nous expliquerons dans ce chapitre le principe de la méthode ; nous donnerons quelques exemples de matrices instrumentales, parmi lesquelles nous avons choisi celle proposée par G. BANON (18), que nous avons été cependant amenés à modifier légèrement ; nous fournirons quelques résultats expérimentaux montrant l'intérêt de cette modification.

Rappelons que le système étant de la forme :

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i) + e(t)$$

soit :

$$A(Z^{-1}) y(t) = B(Z^{-1}) u(t) + e(t)$$

on peut à l'aide de N mesures de l'entrée et de la sortie, écrire :

$$\underline{Y} = X \underline{\theta} + \underline{E}$$

$\underline{Y}$ est le vecteur des sorties, X matrice formée des données entrée-sortie, $\underline{\theta}$ le vecteur des paramètres recherchés.

$$\underline{Y} : M \times 1$$

$$X : M \times m$$

$$\underline{\theta} = m \times 1$$

$$\underline{E} = M \times 1$$

avec $m = n + p + 1$

$$M = N - n$$

Les remarques a) et c) du paragraphe 3-1-1 sont encore valables.

4-1. ETUDES DE LA METHODE

4-1-1. Son principe

Il est basé sur l'idée suivante :

Soit Z une matrice de dimensions $M \times m$. On peut écrire :

$$Z' \underline{Y} = Z' X \underline{\theta} + Z' \underline{E}$$

Si Z est telle que l'inverse de $Z'X$ existe ($Z'X$ est carrée de dimensions $m \times m$), alors :

$$\underline{\theta} = (Z'X)^{-1} Z'Y - (Z'X)^{-1} Z'E$$

Considérons l'estimateur $\hat{\underline{\theta}}$ des paramètres donné par :

$$(4-1) \quad \hat{\underline{\theta}} = (Z'X)^{-1} Z'Y$$

Parmi toutes les matrices Z possibles, certaines assurent la convergence de l'estimateur $\hat{\underline{\theta}}$ vers $\underline{\theta}$, le vecteur des paramètres, au sens de la convergence en probabilité (1). On appelle matrices instrumentales cette classe de matrice.

(1) Convergence en probabilité :

La suite des variables aléatoires $x(n)$ converge en probabilité vers la variable aléatoire x lorsque n tend vers l'infini si :

$$\forall \eta_1, \eta_2 > 0 : \exists N(\eta_1, \eta_2) : n > N \Rightarrow p[|x(n) - x| \geq \eta_1] < \eta_2$$

on écrit :

$$x(n) \xrightarrow{P} x$$

Pour être une matrice instrumentale, Z doit vérifier les deux propriétés suivantes

$$(4-2) \quad \frac{1}{M} Z' E \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p} \underline{0}$$

$$(4-3) \quad \frac{1}{M} Z' X \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{p} A$$

A étant une matrice régulière

Dans ces conditions, l'estimateur :

$$\hat{\underline{\theta}} = (Z'X)^{-1} Z'Y$$

converge en probabilité vers les paramètres $\underline{\theta}$.

En effet :

$$\underline{\theta} = (Z'X)^{-1} Z'Y - (Z'X)^{-1} Z'E$$

donc :

$$(4-4) \quad \begin{aligned} \hat{\underline{\theta}} &= \underline{\theta} + (Z'X)^{-1} Z'E \\ \hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta} &= (Z'X)^{-1} Z'E \\ \hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta} &\xrightarrow{p} A^{-1} \underline{0} \\ \hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta} &\xrightarrow{p} \underline{0} \\ \hat{\underline{\theta}} &\xrightarrow{p} \underline{\theta} \end{aligned}$$

4-1-2. Une classe de matrices instrumentales

Soit Z une matrice de dimensions $M \times m$ dont les éléments sont bornés :

$$|z_{ij}| \leq z_{\max}$$

Si les éléments z_{ij} sont indépendants des éléments de $\underline{E}$, alors :

$$\frac{1}{M} Z' E \xrightarrow{p} \underline{0}$$

démonstration (19) :

$$\underline{G} = \underline{Z}' \underline{E}$$

$$g_i = \sum_{K=1}^M z'_{iK} e_K = \sum_{K=1}^M z_{Ki} e_K$$

$$\begin{aligned} \text{E.M.} \left\{ \frac{1}{M} g_i \right\} &= \text{E.M.} \left\{ \sum_{K=1}^M \frac{z_{Ki} e_K}{M} \right\} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{K=1}^M \text{E.M.} \{ z_{Ki} e_K \} \end{aligned}$$

e_K et z_{Ki} sont indépendants par hypothèse ; donc :

$$\text{E.M.} \left\{ \frac{1}{M} g_i \right\} = \frac{1}{M} \sum_{K=1}^M \text{E.M.} \{ z_{Ki} \} \text{E.M.} \{ e_K \}$$

Les résidus e_K sont centrés (cf 2-1-2-b)

Les éléments z_{Ki} sont bornés

$$\text{E.M.} \left\{ \frac{1}{M} g_i \right\} = 0$$

La variance de $\left\{ \frac{1}{M} g_i \right\}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{E.M.} \left\{ \left(\frac{1}{M} g_i \right)^2 \right\} &= \frac{1}{M^2} \text{E.M.} \{ g_i^2 \} \\ &= \frac{1}{M^2} \text{E.M.} \left\{ \left(\sum_{K=1}^M z_{Ki} e_K \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$|z_{Ki}| \leq z_{\max} \Rightarrow$:

$$\begin{aligned} \text{E.M.} \left\{ \left(\frac{1}{M} g_i \right)^2 \right\} &\leq \frac{z_{\max}^2}{M^2} \left| \text{E.M.} \left\{ \left(\sum_{K=1}^M e_K \right)^2 \right\} \right| \\ &\leq \frac{z_{\max}^2}{M^2} \sum_{K=1}^M \sum_{j=1}^M \left| \text{E.M.} \{ e_K e_j \} \right| \\ &\leq \frac{z_{\max}^2}{M^2} \sum_{K=1}^M \sum_{j=1}^M \left| r_{ee}(K-j) \right| \\ &\leq \frac{z_{\max}^2}{M} \left[\left| r_{ee}(0) \right| + 2 \sum_{K=1}^{M-1} \frac{M-K}{M} \left| r_{ee}(K) \right| \right] \end{aligned}$$

Il est physiquement impossible que les termes $\Gamma_{ee}(K)$ ne soit pas bornés (ceci correspondrait à une énergie infinie). Alors :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{E.M.} \left\{ \left(\frac{1}{M} g_1 \right)^2 \right\} = 0$$

et l'inégalité de TCHEBYCHEV :

$$p \left[|x - \text{E.M.} \{x\}| > h \right] \leq \frac{\sigma_x^2}{h^2}$$

Implique que :

$$g_1 \xrightarrow{p} 0$$

4-1-3. Quelques exemples de matrices instrumentales

a) Rappelons l'estimateur des moindres carrés :

$$\hat{\underline{\theta}} = (X'X)^{-1} X'Y$$

Ici la matrice instrumentale choisie est tout simplement la matrice X elle-même.

$$Z = X$$

Cette matrice n'assure la convergence en probabilité de l'estimateur vers les paramètres que si la propriété démontrée au paragraphe précédent est vérifiée, c'est-à-dire si les éléments de X et $\underline{E}$ sont indépendants, ce qui n'est généralement pas le cas.

b) Rappelons l'estimateur de MARKOV (3-11-1) :

$$\hat{\underline{\theta}} = (X' R^{-1} X)^{-1} X' R^{-1} Y$$

où R est la matrice de covariance des résidus. Ici la matrice instrumentale choisie est :

$$Z = R^{-1} X$$

Toujours pour des raisons de convergence, la matrice X et le vecteur $\underline{E}$ ne doivent pas être corrélés.

c) La référence (19) traite de matrices instrumentales optimales ; on peut poser :

$$X = X_d + X_a$$

- . X_d est la partie déterministe de X , où l'on trouve en particulier $v(t)$ et $u(t)$ (cf 2-1-2- Figure 2-1)
- . X_a est la partie aléatoire de X , où se retrouve tout ce qui est dû à l'influence du bruit.

On démontre que X_d est une matrice instrumentale (en particulier la condition du paragraphe 4-1-2 est vérifiée puisque X_d est déterministe) et que la matrice :

$$Z = R^{-1} X_d$$

où R est la covariance des résidus, est optimale en ce sens qu'elle minimise la variance de l'estimateur. On voit que l'estimateur obtenu avec cette matrice instrumentale est celui de MARKOV dans lequel on a remplacé X par X_d pour qu'il y ait convergence.

Il est évidemment impossible de connaître X_d , c'est pourquoi les auteurs proposent de prendre la matrice instrumentale suivante :

$$Z = \begin{bmatrix} -y_m(N-1) & \dots & -y_m(N-n) & u(N) & \dots & u(N-p) \\ -y_m(N-2) & \dots & -y_m(N-n-1) & u(N-1) & \dots & u(N-p-1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_m(n) & \dots & -y_m(1) & u(n+1) & \dots & u(n+1-p) \end{bmatrix}$$

où $y_m(t)$ représente la sortie du modèle à l'instant t :

$$y_m(t) = - \sum_{i=1}^n \hat{a}_i y_m(t-i) + \sum_{i=1}^p \hat{b}_i u(t-i)$$

$\hat{a}_i$ et $\hat{b}_i$ sont les paramètres estimés par un calcul antérieur, la méthode devant être employée de façon itérative.

Au fur et à mesure que $\hat{a}_1$ et $\hat{b}_1$ se rapprochent des paramètres du système a_1 et b_1 , $y_m(t)$ tend vers $v(t)$ et Z vers X_d .

On pourrait par exemple initialiser le calcul par une méthode des moindres carrés, utiliser les paramètres obtenus pour calculer y_m aux divers instants d'échantillonnage et calculer un nouvel estimateur par la méthode de la matrice instrumentale. Les auteurs, eux, ont utilisé cette méthode en temps réel.

d) BANON (18) propose la matrice instrumentale suivante ; si

$$X = \begin{bmatrix} -y(N-1) & \dots & -y(N-n) & u(N) & \dots & u(N-p) \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}$$

alors :

$$(4-5) \quad Z = \begin{bmatrix} -y(N-1-K) & \dots & -y(N-n-K) & u(N) & \dots & u(N-p) \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}$$

avec $K = n$

Cette matrice instrumentale est dite matrice instrumentale à observations retardées.

4-1-4. Choix de la matrice instrumentale

Nous avons choisi la matrice instrumentale à observations retardées. La simplicité de sa construction est en effet très avantageuse sur le plan numérique. Nous l'avons toutefois modifiée par rapport à celle qu'utilise BANON'. Nous allons maintenant expliquer pourquoi.

Le résidu $e(t)$ est corrélé. On peut prendre pour modèle du générateur de bruit :

$$(4-6) \quad e(t) = G(Z^{-1}) \xi(t) = \xi(t) + g_1 \xi(t-1) \dots + g_q \xi(t-q)$$

où $\xi(t)$ est un bruit blanc.

Remarquons que ce modèle est l'inverse de celui utilisé en (3-2) :

$$F(Z^{-1}) e(t) = \varepsilon(t)$$

mais tout aussi général. Les générateurs sont identiques si :

$$F(Z^{-1}) = \frac{1}{G(Z^{-1})}$$

Pour que la matrice Z de l'équation (4-5) vérifie la propriété du paragraphe 4-1-2, il faut que $y(N-1-K)$, ..., $y(N-n-K)$ soient indépendants de $e(N)$ - et la remarque est valable pour toutes les lignes de Z . Ceci est vérifié si :

$$K \geq q$$

or (2-7)

$$e(t) = A(Z^{-1}) b(t)$$

$b(t)$ étant le bruit additif sur la sortie. Il est clair sur cette formule que si le modèle choisi pour les résidus est le modèle (4-6), on a :

$$q \geq n$$

avec égalité si le bruit $b(t)$ est blanc.

Donc, contrairement à ce que fait BANON., nous prendrons

$$K \geq n$$

Nous montrerons sur quelques exemples en fin de chapitre l'influence d'un choix correct de K . Comme a priori, on ignore quelle valeur attribuer à ce paramètre, le mieux est d'en essayer plusieurs. On pourrait d'emblée le choisir très grand pour être sûr de vérifier l'équation (4-2). Mais analysons l'influence de ce paramètre :

$$Z = \begin{bmatrix} -y(N-K-1) & \dots & -y(N-n-K) & u(N) & \dots & u(N-p) \\ \vdots & & & & & \\ -y(n) & \dots & -y(1) & u(n+1) & \dots & u(n+1-p) \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -y(N-1) & \dots & -y(N-n) & u(N) & \dots & u(N-p) \\ \vdots & & & & & \\ -y(n+K) & \dots & -y(K+1) & u(n+1) & \dots & u(n+1-p) \end{bmatrix}$$

On voit que si dans les moindres carrés n valeurs entrée-sortie suffisaient pour initialiser la récurrence, il en faut ici $n+K$: N données permettent d'écrire $N-n-K$ équations. Il est donc souhaitable de donner à K une valeur faible afin de perdre le moins d'information possible.

Nous n'avons pas encore parlé de l'équation (4-3)

$$\frac{1}{M} Z'X \xrightarrow{P} A$$

A étant régulière.

BANON montre sur un exemple (18-pp. 28-29) que l'existence de M est conditionnée à la fois par l'entrée et par les paramètres à déterminer. Il n'est donc pas possible d'énoncer une règle générale ; c'est à l'utilisateur de choisir une entrée convenable à son système.

4-1-5. Comparaison avec les méthodes de corrélation

Ce paragraphe est calqué sur le paragraphe 3-1-3. Nous ne détaillerons pas les calculs.

La matrice A définie par :

$$\frac{1}{M} Z'X \xrightarrow{P} A$$

est la limite en probabilité de :

$$\begin{bmatrix}
 \Gamma_{yy}(K) & \dots & \Gamma_{yy}(K+1-n) & -\Gamma_{yu}(K+1) & \dots & -\Gamma_{yu}(K+1-p) \\
 \Gamma_{yy}(n+K-1) & \dots & \Gamma_{yy}(K) & -\Gamma_{yu}(n+K) & \dots & -\Gamma_{yu}(K+n-p) \\
 -\Gamma_{yu}(1) & \dots & \Gamma_{yu}(n) & \Gamma_{uu}(0) & \dots & \Gamma_{uu}(p) \\
 -\Gamma_{yu}(0) & & & & & \\
 -\Gamma_{yu}(1) & & & & & \\
 -\Gamma_{yu}(p-1) & \dots & -\Gamma_{yu}(p-n) & \Gamma_{uu}(p) & & \Gamma_{uu}(0)
 \end{bmatrix}$$

Si l'on fait $K=0$, on retrouve les résultats obtenus pour les moindres carrés.

4-1-6. Estimation de la variance des résidus

Comme dans la méthode des moindres carrés, on peut estimer les résidus :

$$\hat{\underline{E}} = \underline{Y} - \underline{X}\hat{\underline{\theta}}$$

Démontrons que cet estimateur converge en probabilité vers $\underline{E}$

$$\hat{\underline{E}} = \underline{Y} - \underline{X}(\underline{\theta} + (\underline{Z}'\underline{X})^{-1}\underline{Z}'\underline{E}) = \underline{E} - \underline{X}(\underline{Z}'\underline{X})^{-1}\underline{Z}'\underline{E}$$

$$\text{or : } \frac{1}{M} \underline{Z}'\underline{E} \xrightarrow{p} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{M} \underline{Z}'\underline{X} \xrightarrow{p} \underline{A}$$

$$\hat{\underline{E}} \xrightarrow{p} \underline{E}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_e^2 &= \frac{1}{M} \hat{\underline{E}}' \hat{\underline{E}} = \frac{1}{M} (\underline{X}[\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}}] + \underline{E})' (\underline{X}[\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}}] + \underline{E}) \\
 &= \frac{1}{M} ([\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}}]' \underline{X}' \underline{X} [\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}}] + \underline{E}' \underline{E} + \underline{E}' \underline{X} [\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}}] + [\underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}}]' \underline{X}' \underline{E})
 \end{aligned}$$

$$\text{or : } \underline{\theta} - \hat{\underline{\theta}} \xrightarrow{p} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{M} \underline{E}' \underline{E} \xrightarrow{p} \sigma_e^2$$

$$\hat{\sigma}_e^2 \xrightarrow{p} \sigma_e^2$$

Soulignons que cette méthode permet d'estimer la variance des *résidus* $e(t)$ et non celle du bruit blanc $\varepsilon(t)$ comme dans les moindres carrés généralisés.

4-1-7. Corrélation des paramètres

Cherchons à calculer la matrice de corrélation des paramètres. Nous savons que sa connaissance est intéressante puisqu'elle fournit la variance des paramètres, c'est-à-dire leur précision.

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\theta} &= E . M. \{(\hat{\theta} - \underline{\theta})(\hat{\theta} - \underline{\theta})'\} \\ &= E . M. \{(Z'X)^{-1} Z' \underline{E} . \underline{E}' Z (Z'X)^{-1}\}\end{aligned}$$

On démontre alors (19) que si

$$. X = X_d + X_a \quad (\text{cf } 4-1-3-c)$$

$$. R = E.M. \{\underline{E}.\underline{E}'\}$$

. l'entrée, la sortie, les éléments z_{ij} et le bruit sont bornés ;

Alors :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Gamma_{\theta\theta} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{M} \left(\frac{1}{M} Z'X_d \right)^{-1} \left(\frac{1}{M} Z'RZ \right) \left(\frac{1}{M} X_d'Z \right)^{-1} \right)$$

Pour connaître cette précision, il faut donc non seulement connaître X_d - que l'on pourrait à la rigueur estimer grâce au modèle - mais encore les caractéristiques des résidus.

Cette formule est donc malheureusement inutilisable, puisque les résidus ne sont jamais blancs - et qu'il est difficile d'estimer R . Une approximation grossière de R serait d'ailleurs dangereuse. En effet, la variance des paramètres indique quelle confiance on peut avoir dans le modèle, il est donc important d'en avoir une idée juste. Il serait dommage d'avoir peu confiance dans un bon modèle et risqué d'avoir confiance dans un mauvais modèle. Il nous a semblé plus logique pour mesurer la précision du modèle dans ce cas de comparer les sorties du modèle et du système à la même entrée. Notons que la méthode de la matrice instrumentale est basée sur une distance de structure (convergence de $\hat{\theta}$ vers $\underline{\theta}$). Le test que

nous proposons est basé sur une distance d'état. Nous avons vu en 1-11-1 que ces deux distances ne sont pas équivalentes puisque la distance d'état peut être faible sans que la distance de structure le soit (cf figure 1-5). Mais puisqu'on est assuré théoriquement de la convergence de l'estimateur, la distance d'état est une bonne mesure de la qualité de l'estimation.

Nous venons de voir que contrairement aux moindres carrés généralisés, la méthode de la matrice instrumentale repose sur des démonstrations mathématiques rigoureuses. Par contre, elle présente le grave inconvénient de ne pas fournir la précision de l'estimation. Nous comparerons les résultats fournis par les deux techniques dans le chapitre 6. Nous allons dans le paragraphe suivant présenter quelques exemples portant sur l'étude d'un problème spécifique de cette méthode, à savoir le choix du retard K (cf 4-5) à apporter aux données pour être sûr de la convergence de l'estimateur.

4-11. RESULTATS EXPERIMENTAUX

4-11-1. Organisation du programme

Ce programme est conçu pour être utilisé dans des circonstances diverses ; l'utilisateur fournit les données entrée-sortie et fixe les paramètres n, ordre du modèle, p lié au nombre de paramètres relatifs à l'entrée, R, retard pur du système et K retard à apporter à la matrice instrumentale ($n \leq 10$; $p \leq 10$; $R \leq 10$). Ce programme calcule :

$$C = \underline{\hat{E}}' \cdot \underline{\hat{E}}$$

critère qui mesure l'erreur de prédiction du modèle. Le critère peut seulement servir d'indication ; nous avons vu dans le chapitre 3 que sa minimisation conduit à une estimation biaisée l'estimation des moindres carrés. Il est relié directement à la variance des résidus par (4-7)

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{M} \underline{\hat{E}}' \underline{\hat{E}}$$

avec $M \times N - n - K$, dimension du vecteur $\hat{\underline{E}}$.

Nous pourrions vérifier la qualité de l'estimation lors de nos diverses simulations en comparant $\hat{\sigma}_e^2$ avec σ_e^2 . Rappelons que les équations simulées sont :
soit (3-9) :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) + \sum_{i=1}^n a_i v(t-i) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = G_1(Z^{-1}) \varepsilon(t) \end{array} \right.$$

soit (3-10)

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) + \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i) + e(t) \\ e(t) = G_2(Z^{-1}) \varepsilon(t) = \varepsilon(t) (1 + g_{2,1} Z^{-1} + \dots + g_{2,q} Z^{-q}) \end{array} \right.$$

avec $\varepsilon(t)$ bruit blanc, soit gaussien, soit uniformément réparti entre 0 et 1.

Dans le premier cas, bruit additif en sortie, on a :

$$e(t) = A(Z^{-1}) G_1(Z^{-1}) \varepsilon(t) = G(Z^{-1}) \varepsilon(t)$$

$$e(t) = \varepsilon(t) (1 + g_1 Z^{-1} + \dots + g_q Z^{-q})$$

$$\sigma_e^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + g_1^2 + \dots + g_q^2)$$

et dans le second cas :

$$\sigma_e^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + g_{2,1}^2 + \dots + g_{2,q}^2)$$

L'entrée utilisée est une séquence binaire pseudo-aléatoire de longueur maximale, de niveau ± 1 .

4-11-2. Résultats de caractérisation

Nous avons tracé les courbes "critère = $f(n)$ " pour deux niveaux de bruit différents, l'ordre du système simulé étant 2. Ces courbes sont portées en fin de chapitre (courbe 4-1). On voit qu'elles présentent une allure différente de

celles obtenues par moindres carrés généralisés (courbes 3-3). L'augmentation brutale du critère peut être assimilée au phénomène qui faisait qu'à partir d'un certain ordre, les résidus estimés par les moindres carrés généralisés étaient blancs.

La détermination de l'ordre est facile grâce à de telles courbes dans le cas de bruit faible ; elle est plus délicate quand le niveau de bruit est élevé. Nous renvoyons au paragraphe 7-11-2 pour l'analyse détaillée d'un exemple.

4-11-3. Détermination du retard de la matrice instrumentale

La seule condition que l'on a pu déterminer théoriquement sur K est :

$$K \geq n$$

Nous avons donc identifié la même série de données pour K croissant à partir de n ; nous allons présenter quelques exemples montrant comment on peut alors choisir le meilleur résultat.

Exemple 4-1

Nous avons simulé une équation du type (3-10)

$$\begin{cases} y(t) - 1,5 y(t-1) + 0,7 y(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) + e(t) \\ e(t) = \varepsilon(t) (1 - Z^{-1} + 0,2 Z^{-2} + 0,2 Z^{-3}) \end{cases}$$

$\varepsilon(t)$: blanc, gaussien, centré, d'écart-type $\sigma_{\varepsilon} = 0,9$. On a :

$$\sigma_e = 1,30$$

Nous avons utilisé 200 données.

Les résultats d'identification pour $K = 2, 3, 4$ sont reportés tableau 4-1. Dans ce cas, on a K théorique ≥ 3 .

θ	$\hat{\theta} ; K=2$	$\hat{\theta} ; K=3$	$\hat{\theta} ; K = 4$
- 1,5	- 1,66	- 1,45	- 1,46
0,7	0,80	0,67	0,68
0	- 0,06	- 0,03	- 0,05
1	0,95	0,94	0,94
0,5	0,45	0,67	0,64
critère	478	374	378
$\sigma_e = 1,30$	1,55	1,37	1,37

Tableau 4-1

On note sur ce tableau une diminution remarquable du critère (et de la variance des résidus, qui lui est directement reliée par (4-7)), lors du passage de $K = 2$ à $K = 3$, alors que celui-ci évolue peu quand on passe à $K = 4$.

Les paramètres sont nettement meilleurs quand $K = 3$ ou 4, en particulier les paramètres a_i . Seul le paramètre b_2 est moins bon. Nous avons déjà vu lors de notre comparaison des méthodes des moindres carrés et des moindres carrés généralisés. (3-III-4), que, le vecteur $\underline{\theta}$ étant traité dans son ensemble, il pouvait se produire que l'une des composantes θ_i ne soit pas améliorée quand on utilise une méthode pourtant plus performante.

Exemple 4-2

L'équation simulée est du type (3-9)

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) - 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = (1 - 0,5 Z^{-1}) \varepsilon(t) \end{array} \right.$$

$\varepsilon(t)$: blanc, gaussien, centré, d'écart-type 0,9.

On a :

$$e(t) = (1 - 0,5 Z^{-1}) (1 - 1,5 Z^{-1} + 0,7 Z^{-2}) \varepsilon(t) \\ = 1 - 2 Z^{-1} + 1,45 Z^{-2} - 0,35 Z^{-3}$$

$$\Rightarrow \sigma_e = 2,6$$

Nous avons utilisé 200 données.

Les résultats d'identification sont reportés tableau 4-2, pour $K = 2, 3, 4$. Dans ce cas on a : K théorique ≥ 3 .

θ	$\hat{\theta} ; K=2$	$\hat{\theta} ; K=3$	$\hat{\theta} ; K=4$
- 1,5	- 1,67	- 1,39	- 1,36
0,7	0,82	0,66	0,66
0	- 0,16	- 0,12	- 0,13
1	1,05	1,01	1,0
0,5	0,48	0,74	0,76
critère	1596	1206	1176
$\sigma_e = 2,6$	2,83	2,45	2,44

Tableau 4-2

Les remarques faites pour l'exemple 4-1 sont encore valables : diminution notable du critère lors du passage de $K = 2$ à $K = 3$; amélioration des paramètres, sauf b_2 .

Exemple 4-3

L'équation simulée est du type (3-10)

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) - 1,855 y(t-1) + 0,860 y(t-2) = 0,09 u(t-1) + e(t) \\ e(t) = (1 - Z^{-1} + 0,2 Z^{-2} + 0,2 Z^{-3}) \varepsilon(t) \end{array} \right.$$

$\varepsilon(t)$: blanc, gaussien, centré, d'écart-type $\sigma_\varepsilon = 0,3$

On a :

$$\sigma_e = 0,43$$

Nous avons utilisé 200 données. Les résultats sont reportés tableau 4-3.

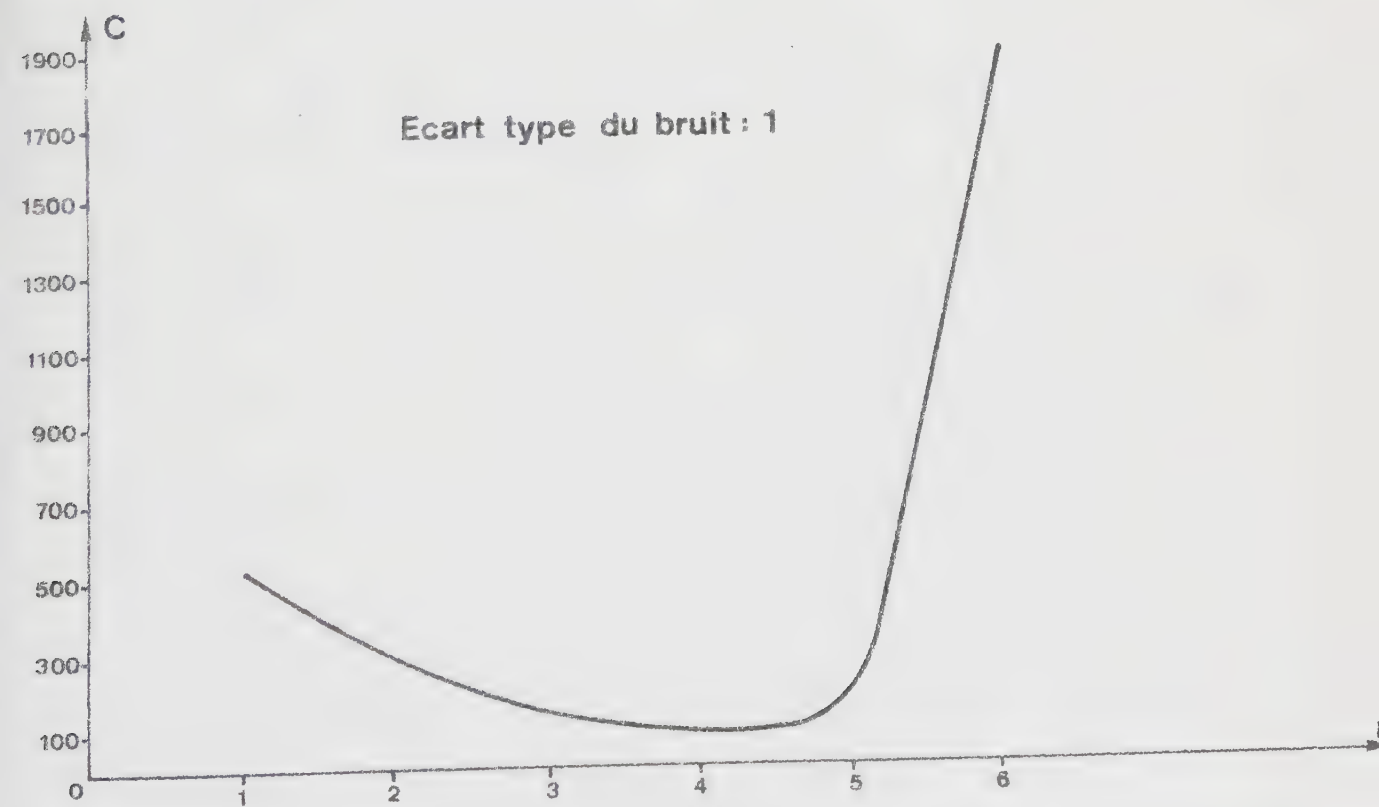
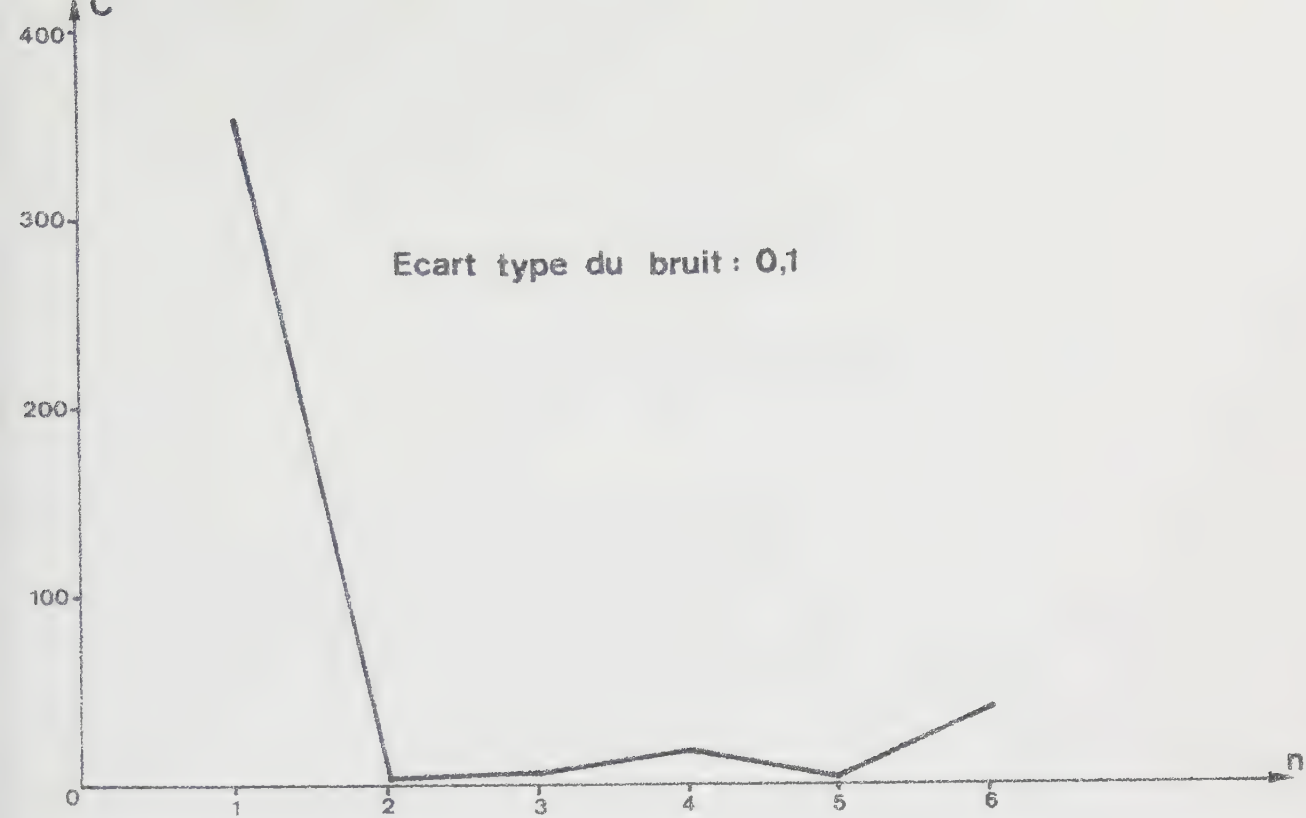
θ	$\hat{\theta}; K = 2$	$\hat{\theta}; K = 3$
- 1,855	- 2,47	- 1,62
0,860	1,47	0,62
0,09	0,06	0,08
critère	68	30
$\sigma_e = 0,43$	0,585	0,39

Tableau 4-3

L'amélioration dans ce cas est vraiment très sensible quand on passe de $K = 2$ à $K = 3$. Elle se traduit encore par une nette diminution du critère.

Ces quelques exemples nous ont permis de montrer l'importance d'un choix convenable du retard K à apporter à la matrice instrumentale à observations retardées. Nous avons vu que l'examen du critère défini en 4-11-1 permettait de faire facilement ce choix, bien que ce critère ne varie pas comme une distance de structure.

La méthode de la matrice instrumentale est une méthode facile à mettre en oeuvre sur le plan numérique, donnant explicitement un estimateur dont la convergence en probabilité vers les vrais paramètres a été démontrée. Son seul inconvénient, mais il est grave, est de ne pas fournir la précision de l'estimation.



CHAPITRE 5

LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Nous allons maintenant présenter la méthode du maximum de vraisemblance mise au point par K.J. ÅSTRÖM, T. BOHLIN, et S. WENSMARK en 1965 (20). Nous étudierons le modèle proposé, plus détaillé que celui utilisé jusqu'à présent, le critère choisi et la méthode de minimisation employée. Nous donnerons les propriétés de l'estimateur ainsi obtenu. Quelques résultats pratiques présentés en fin de chapitre montreront comment résoudre certains des problèmes posés par l'utilisation de cette méthode.

5-1. ETUDE DE LA METHODE

Rappelons que le procédé étudié au chapitre 2 est sous la forme de la figure 5-1.

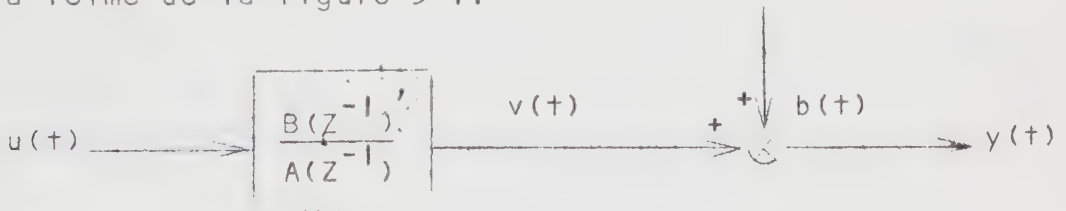


Figure 5-1

$b(t)$ est le bruit additif en sortie. L'équation de fonctionnement est :

$$A(Z^{-1}) y(t) = B(Z^{-1}) u(t) + A(Z^{-1}) b(t)$$

Le modèle que nous avons utilisé jusqu'à présent était (2-6) :

$$A(Z^{-1}) y(t) = B(Z^{-1}) u(t) + e(t)$$

Le modèle proposé par ÅSTRÖM, BOHLIN et WENSMARK est plus détaillé :

$$(5-1) \quad A(Z^{-1}) y(t) = B(Z^{-1}) u(t) + C(Z^{-1}) \varepsilon(t)$$

dans lequel $\varepsilon(t)$ représente un bruit blanc centré, de variance λ^2 .

Si le bruit $b(t)$ en sortie est blanc, nous aurons donc :

$$C(Z^{-1}) = A(Z^{-1})$$

et λ^2 sera la variance de $b(t)$.

Si $b(t)$ est issu d'un bruit blanc par passage dans un filtre $G(Z^{-1})$, nous aurons :

$$C(Z^{-1}) = A(Z^{-1}) G(Z^{-1})$$

Nous allons poser, pour la suite de l'exposé, la forme générale suivante :

$$C(Z^{-1}) = 1 + c_1 Z^{-1} + \dots + c_q Z^{-q}$$

Ce polynôme doit avoir ses zéros à l'intérieur du cercle unité (condition de stabilité).

Le cas d'un bruit à valeur moyenne non nulle peut être pris en compte par l'intermédiaire d'un coefficient constant, comme en 2-1-2-b. Le modèle est alors :

$$(5-2) \quad A(Z^{-1}) y(t) = B(Z^{-1}) u(t) + C(Z^{-1}) \varepsilon(t) + Y_0$$

L'identification d'un procédé par ce modèle fournira, outre les valeurs numériques des paramètres a_i et b_i , les paramètres c_i relatifs au générateur de bruit.

5-1-1. L'erreur de prédiction du modèle

Cette erreur s'exprime différemment avec le modèle (5-1) et avec le modèle (2-6). Nous avons vu (2-1-2-a) qu'elle était alors (2-10)

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t/t-1)$$

où $\hat{y}(t/t-1)$ est la prédiction de la sortie à l'instant t à l'aide du modèle et des mesures aux instants précédents. Quelle est la prédiction de la sortie que l'on peut faire avec le modèle d'ASTRÖM ?

$$A(Z^{-1}) y(t) = B(Z^{-1}) u(t) + C(Z^{-1}) \varepsilon(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= A^{-1}(Z^{-1})B(Z^{-1})u(t) + A^{-1}(Z^{-1})C(Z^{-1})\varepsilon(t) \\ &= \varepsilon(t) + A^{-1}(Z^{-1})B(Z^{-1})u(t) + A^{-1}(Z^{-1})[C(Z^{-1})-A(Z^{-1})]\varepsilon(t) \end{aligned}$$

or

$$\varepsilon(t) = C^{-1}(Z^{-1})A(Z^{-1})y(t) - C^{-1}(Z^{-1}) \cdot B(Z^{-1}) u(t)$$

donc :

$$\begin{aligned} y(t) &= \varepsilon(t) + A^{-1}(Z^{-1})B(Z^{-1})u(t) + A^{-1}(Z^{-1})[C(Z^{-1})-A(Z^{-1})] \\ &\quad C^{-1}(Z^{-1}) \times [A(Z^{-1})y(t) - B(Z^{-1}) u(t)] \end{aligned}$$

d'où :

$$y(t) = \varepsilon(t) + C^{-1}(Z^{-1})[C(Z^{-1})-A(Z^{-1})] y(t) + C^{-1}(Z^{-1})B(Z^{-1})u(t)$$

Le facteur de $y(t)$ au second membre est :

$$C^{-1}(Z^{-1}) [C(Z^{-1}) - A(Z^{-1})]$$

Comme le premier terme des polynômes $C(Z^{-1})$ et $A(Z^{-1})$ est 1, ce polynôme contient Z^{-1} en facteur. C'est dire que l'on peut prédire la sortie à l'instant t par :

$$\hat{y}(t/t-1) = C^{-1}(Z^{-1})[C(Z^{-1})-A(Z^{-1})]y(t) + C^{-1}(Z^{-1})B(Z^{-1})u(t)$$

d'où :

$$(5-3) \quad y(t) - \hat{y}(t/t-1) = \varepsilon(t)$$

L'erreur de prédiction à l'instant t est blanche. En outre, sa variance, qui est celle de $\varepsilon(t)$, est λ^2 ; elle est inférieure à la variance du résidu $e(t)$ σ_e^2 puisque :

$$\underline{Y}_m = \text{E.M.} \{ \underline{Y}/A, B, C, \lambda, \underline{U} \} = A^{-1} B \cdot \underline{U}$$

$$\underline{Y} - \underline{Y}_m = A^{-1} C \underline{\varepsilon}$$

$$\Gamma_{YY} = \text{E.M.} \{ (\underline{Y} - \underline{Y}_m) (\underline{Y} - \underline{Y}_m)' \} = \lambda^2 A^{-1} C \cdot C' A^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p[\underline{Y}/A, B, C, \underline{U}, \lambda] &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\Gamma|^{\frac{N}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\underline{Y} - \underline{Y}_m)' \Gamma_{YY}^{-1} (\underline{Y} - \underline{Y}_m) \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \lambda^N} \exp \left[-\frac{1}{2\lambda^2} \underline{\varepsilon}' \underline{\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

La fonction de vraisemblance logarithmique L est :

$$L = \ln p [\underline{Y}/A, B, C, \underline{U}, \lambda]$$

$$L = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - N \ln(\lambda) - \frac{1}{2\lambda^2} \underline{\varepsilon}' \underline{\varepsilon}$$

C'est cette fonction, considérée comme fonction des paramètres A, B, C, λ , qu'il s'agit de maximiser.

$$L = -\frac{1}{2\lambda^2} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) - N \ln \lambda + \text{constante}$$

Nous pouvons séparer le paramètre λ des autres, que nous grouperons dans le vecteur $\underline{\theta}$ de dimension $(n+p+1+q)$:

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_p \\ c_1 \\ \vdots \\ c_q \end{bmatrix}$$

Maximiser L est équivalent à minimiser $V(\underline{\theta})$ défini comme suit :

$$(5-4) \quad V(\underline{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t)$$

L'estimation de λ est alors :

$$(5-5) \quad \hat{\lambda}^2 = \frac{2}{N} V(\hat{\underline{\theta}})$$

si $\hat{\underline{\theta}}$ est le vecteur minimisant $V(\underline{\theta})$.

La solution de la méthode du maximum de vraisemblance est donc celle qui donne le minimum du critère $V(\underline{\theta})$. Le critère n'est pas une fonction quadratique des paramètres puisque la relation permettant le calcul des $\varepsilon(t)$ est :

$$(5-6) \quad C(Z^{-1}) \varepsilon(t) = A(Z^{-1}) y(t) - B(Z^{-1}) u(t)$$

Donc contrairement aux méthodes précédemment étudiées, la solution n'est pas analytique. Il faut passer par les techniques de programmation non linéaire évoquées en I-II-1 pour trouver le minimum du critère.

L'algorithme général de minimisation est :

$$\underline{\theta}_{K+1} = \underline{\theta}_K - \alpha_K \underline{V}_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}_K)$$

- $\underline{V}_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}_K)$ est le gradient de la fonction $V(\underline{\theta})$ au point $\underline{\theta}_K$:

$$\underline{V}_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}_K) = \left[\frac{\partial V}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial \theta_n} \right]'(\underline{\theta}_K)$$

- α_K est le pas de l'itération. S'il est choisi constant, c'est une méthode du gradient. On peut améliorer la convergence en choisissant :

$$\alpha_K = \left[\underline{V}_{\underline{\theta}\underline{\theta}} \right]^{-1}(\underline{\theta}_K)$$

C'est alors une méthode de NEWTON-RAPHSON

$$V_{\theta\theta}(\underline{\theta}_K) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_n \partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_n \partial \theta_n} \end{bmatrix} (\underline{\theta}_K)$$

5-1-3. Etude de la solution numérique

Les composantes du gradient V_{θ} sont :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_i} = \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_i}$$

et les éléments de la matrice $V_{\theta\theta}$:

$$(5-7) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \sum_{t=1}^N \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_j} + \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \frac{\partial^2 \varepsilon(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

La minimisation du critère exige donc le calcul de $\varepsilon(t)$, $\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \theta_i}$, $\frac{\partial^2 \varepsilon(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ à chaque instant d'échantillonnage.

GUSTAVSSON (12) donne un principe de calcul numérique extrêmement simple.

a) Calcul des $\varepsilon(t)$

Il est basé sur l'équation (5-6)

$$C(Z^{-1}) \varepsilon(t) = A(Z^{-1}) y(t) - B(Z^{-1}) u(t)$$

Cette équation aux différences est équivalente au modèle d'état suivant :

$$\underline{x}_1(t+1) = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & \\ -c_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_1(t) + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} y(t) - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$\xi(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad \underline{x}_1(t) + y(t) - b_0 u(t)$$

Remarquons que ce modèle d'état est légèrement différent du modèle proposé en 2-11-3. Nous avons supposé ici $n=p=q$ pour simplifier l'écriture. Il est clair, si ce n'est pas le cas, qu'il suffit de poser certains coefficients nuls dans les vecteurs ci-dessus.

Si le modèle est du type (5-2), le paramètre Y_0 intervient de la façon suivante :

$$\xi(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad \underline{x}_1(t) + y(t) - b_0 u(t) - Y_0$$

b) Calcul de $\frac{\partial \xi(t)}{\partial \theta_l}$

Il existe diverses relations entre ces dérivées qui simplifient grandement le calcul.

De la formule (5-6) on tire :

$$(5-8) \quad \begin{cases} C(Z^{-1}) \frac{\partial \xi(t)}{\partial a_l} = Z^{-1} y(t) & (l=1, \dots, n) \\ C(Z^{-1}) \frac{\partial \xi(t)}{\partial b_l} = -Z^{-1} u(t) & (l=0, \dots, p) \\ C(Z^{-1}) \frac{\partial \xi(t)}{\partial c_l} = -Z^{-1} \xi(t) & (l=1, \dots, q) \end{cases}$$

On peut remarquer que ces dérivées ont la propriété suivante :

$$(5-9) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial a_1} = Z^{-i+1} & \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial a_1} = \frac{\partial \mathcal{E}(t-i+1)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial b_1} = Z^{-1} & \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial b_0} = \frac{\partial \mathcal{E}(t-1)}{\partial b_0} \\ \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial c_1} = Z^{-i+1} & \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial c_1} = \frac{\partial \mathcal{E}(t-i+1)}{\partial c_1} \end{array} \right.$$

Le calcul des dérivées sera donc simplifié puisque seule la première composante des vecteurs :

$$\underline{\mathcal{E}}_a(t) = \left[\frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial a_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial a_n} \right]^T$$

$$\underline{\mathcal{E}}_b(t) = \left[\frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial b_0} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial b_p} \right]^T$$

$$\underline{\mathcal{E}}_c(t) = \left[\frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial c_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial c_q} \right]^T$$

doit être calculée.

Ici encore le calcul est simplifié si l'on exprime l'équation (5-8) sous forme de modèle d'état. Nous donnons ici un seul exemple relatif au vecteur $\underline{\mathcal{E}}_a(t)$. Le lecteur transposera facilement les remarques suivantes à $\underline{\mathcal{E}}_b$ et $\underline{\mathcal{E}}_c$.

Posons :

$$\underline{x}_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi(t)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \xi(t)}{\partial a_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi(t)}{\partial a_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi(t)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \xi(t-1)}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi(t-n+1)}{\partial a_1} \end{bmatrix}$$

On a :

$$\underline{x}_2(t+1) = \begin{bmatrix} -c_1 & -c_2 & \dots & -c_n \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_2(t) + \begin{bmatrix} y(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

On voit que seule la première composante de $\underline{x}_2(t+1)$ nécessite un calcul, les autres se déduisent de $\underline{x}_2(t)$ par simple décalage.

c) Calcul de $\frac{\partial^2 \xi(t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$

Les dérivées secondes vérifient comme les dérivées premières quelques relations particulières qui rendent leur calcul aisé.

Des formules (5-8) et (5-9), on tire :

$$(5-10) \left\{ \begin{array}{l} C(Z^{-1}) \frac{\partial^2 \varepsilon(+)}{\partial a_1 \partial c_j} = - Z^{-j} \frac{\partial \varepsilon(+)}{\partial a_1} = - Z^{-1-j+1} \frac{\partial \varepsilon(+)}{\partial a_1} \\ C(Z^{-1}) \frac{\partial^2 \varepsilon(+)}{\partial b_1 \partial c_j} = - Z^{-j} \frac{\partial \varepsilon(+)}{\partial b_1} = - Z^{-1-j} \frac{\partial \varepsilon(+)}{\partial b_0} \\ C(Z^{-1}) \frac{\partial^2 \varepsilon(+)}{\partial c_1 \partial c_j} = - Z^{-j} \frac{\partial \varepsilon(+)}{\partial c_1} - Z^{-1} \frac{\partial \varepsilon(+)}{\partial c_j} = - 2Z^{-1-j+1} \frac{\partial \varepsilon(+)}{\partial c_1} \end{array} \right.$$

Le calcul est d'autant plus simple que :

$$(5-11) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon(+)}{\partial a_1 \partial b_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon(+)}{\partial a_1 \partial a_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon(+)}{\partial b_1 \partial b_j} = 0$$

et que :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(+)}{\partial a_1 \partial c_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon(+)}{\partial a_j \partial c_1} = \frac{\partial^2 \varepsilon(+)}{\partial a_m \partial c_{m'}} \quad \text{si } m + m' = i + j$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(+)}{\partial b_1 \partial c_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon(+)}{\partial b_j \partial c_1} = \frac{\partial^2 \varepsilon(+)}{\partial b_m \partial c_{m'}} \quad \text{si } m + m' = i + j$$

Le système (5-10) peut facilement être mis sous forme d'équation d'état, et traité comme au b) qui précède.

Rappelons que l'on peut simplifier l'algorithme en utilisant pour le calcul de la matrice $V_{\theta\theta}$ non pas l'expression (5-7) mais une expression approchée :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_j} = \sum_{t=1}^N \frac{\partial \varepsilon(+)}{\partial \theta_1} \frac{\partial \varepsilon(+)}{\partial \theta_j}$$

La méthode est alors appelée Méthode de GAUSS-NEWTON. On préfère généralement utiliser ce calcul simplifié pour démarrer l'identification (seul le calcul des dérivées premières $\frac{\partial \varepsilon(+)}{\partial \theta_i}$

est alors nécessaire). On sait d'ailleurs que l'algorithme de NEWTON-RAPHSON risque de ne pas converger si on l'applique loin de l'optimum.

5-1-4. Initialisation

a) Initialisation de la recherche

L'algorithme est :

$$\underline{\theta}_{K+1} = \underline{\theta}_K - \alpha_K \underline{V}_{\theta}(\underline{\theta}_K)$$

Le choix du vecteur $\underline{\theta}_0$ de départ est important puisqu'on a intérêt à le prendre le plus près possible du minimum afin que la recherche soit la plus rapide possible. Il existe un moyen efficace pour bien le choisir : si l'on suppose les paramètres c_i nuls, le modèle est identique à celui des moindres carrés ; $V(\underline{\theta})$ est une fonction quadratique des paramètres a_i et b_i et en un pas, l'algorithme de GAUSS-NEWTON conduit à l'estimateur des moindres carrés. Celui-ci est biaisé, mais tout de même relativement proche de la solution recherchée. Soulignons que c'est l'algorithme de GAUSS-NEWTON qu'il faut utiliser dans ce cas, puisque seul le calcul des dérivées secondes simplifiées du critère est possible quand les paramètres c_i sont nuls (cf. 5-11).

b) Initialisation des calculs

Nous n'avons pas encore parlé de l'influence des conditions initiales de l'équation (5-1). Pour initialiser cette récurrence, il faudrait connaître n conditions initiales, fonction de n valeurs de la sortie $y(t)$, p valeurs de l'entrée $u(t)$ et q valeurs du bruit $\varepsilon(t)$. Or si la sortie et l'entrée sont mesurables, il n'en est pas de même de $\varepsilon(t)$. Les conditions initiales sont inconnues. ÅSTRÖM, BOHLIN et WENSWARK les considèrent dans (20) comme des paramètres à identifier. Ceci accroît la dimension du vecteur d'inconnues de n et complique beaucoup les algorithmes de calcul.

Comparons le calcul de $\varepsilon(l)$, erreur de prédiction à l'instant l , selon que les conditions initiales sont nulles ou pas :

- conditions initiales nulles :

$$\varepsilon(l) = y(l) - b_0 u(l)$$

- conditions initiales quelconques :

$$(5-12) \quad \varepsilon(l) = y(l) - b_0 u(l) - Cl_l$$

$$\text{avec} \quad Cl_l = -a_1 y(0) \dots - a_n y(-n+1) + b_1 u(0) + \dots + b_p u(-p+1) \\ + c_1 \varepsilon(0) + \dots + c_q \varepsilon(-q+1)$$

A notre avis, c'est moins le bruit $\varepsilon(t)$, centré, que les valeurs de $y(t)$ et $u(t)$ initiales qui interviennent dans Cl_l . On peut donc essayer de simplifier le problème d'estimation en présence de conditions initiales non nulles en tenant compte uniquement de la perturbation due aux valeurs initiales de l'entrée et de la sortie, mesurables. On fait ainsi une légère erreur sur $\varepsilon(l)$ et les composantes suivantes. Mais comme le système est stable, cette erreur a de moins en moins d'influence quand t augmente. Comme la durée d'identification est grande devant les constantes de temps du système, on peut espérer que cette erreur sera négligeable.

Pour tenir compte des conditions initiales sur la sortie et sur l'entrée, il faudrait modifier l'algorithme proposé en 5-1-3-a pour calculer $\varepsilon(t)$ de $t=1$ à $t=n$, ce qui est désavantageux sur le plan encombrement mémoire. Nous pensons qu'il est plus simple dans ce cas, de mesurer les valeurs d'entrée et de sortie, au point de fonctionnement choisi, quand le système est stable, et de centrer ensuite les valeurs mesurées lorsque la consigne est le signal utilisé pour l'identification. Ce processus simplifie beaucoup le programme.

5-1-5. Propriétés de l'estimateur

Ces propriétés ont été définies par ÅSTRÖM et BOHLIN (21) pour N , nombre de mesures, tendant vers l'infini, dans le

cas de bruit gaussien. Les démonstrations sont longues et compliquées, nous ne les donnerons pas ici.

- . L'estimateur $\hat{\underline{\theta}}$ converge vers les paramètres $\underline{\theta}$
- . La covariance de l'estimateur $\Gamma_{\theta\theta}$ est minimale.

Donc l'estimateur du maximum de vraisemblance est optimal au sens de la covariance des paramètres.

On démontre que cette covariance $\Gamma_{\theta\theta}$ est donnée par $\hat{\lambda}^2 |V_{\theta\theta}(\hat{\underline{\theta}})|^{-1}$, matrice inverse des dérivées secondes à l'optimum, pondérée par la variance estimée $\hat{\lambda}^2$.

$$(5-13) \quad \Gamma_{\theta\theta} = \hat{\lambda}^2 |V_{\theta\theta}(\hat{\underline{\theta}})|^{-1}$$

Donc la méthode fournit un estimateur et sa précision ; de plus, pour obtenir cette précision, aucun calcul supplémentaire n'est effectué puisque $V_{\theta\theta}$ est déjà calculée.

Lorsque $V_{\theta\theta}$ n'est pas inversible, cela veut dire que la variance de l'un des paramètres est très grande ; on peut en conclure que le modèle comporte trop de paramètres (ordre trop élevé).

Nous venons de voir que le maximum de vraisemblance présente d'énormes avantages sur le plan théorique puisque l'estimateur calculé rend la variance des paramètres minimale. D'un autre côté, la recherche de l'estimateur doit se faire par programmation non linéaire, ce qui est d'une mise en oeuvre délicate. Un autre inconvénient de la méthode réside dans la nécessité d'hypothèse de normalité du bruit. Nous allons présenter dans le paragraphe suivant quelques résultats obtenus en simulation.

5-11. RESULTATS EXPERIMENTAUX

5-11-1. Organisation du programme

Nous avons, comme pour les autres méthodes, élaboré un programme dont les entrées-sorties se font de façon très

générale. De plus, nous avons voulu utiliser la souplesse du système conversationnel CP/CMS à l'exécution même du programme. En effet, on a le choix, pour la recherche du minimum du critère, entre deux algorithmes de calcul : la méthode de GAUSS-NEWTON, utilisant les dérivées secondes simplifiées, pour commencer, puis lorsqu'on se rapproche du minimum, la méthode de NEWTON-RAPHSON. A quel moment passer d'une méthode à l'autre : le test aurait pu être basé sur l'évolution du critère, ou bien sur celle des paramètres, qui ne sont pas forcément équivalentes. Il nous a semblé que le plus habile était d'introduire "un homme dans la boucle" ; le programme demande donc à l'utilisateur à chaque itération quelle stratégie il désire utiliser, et en fonction de la réponse, s'aiguille vers un algorithme ou l'autre.

L'entrée utilisée pour les simulations présentées ci-dessous est une séquence binaire pseudo-aléatoire de longueur maximale, de niveau ± 1 .

5-11-2. Résultats de caractérisation

Ces résultats sont présentés courbe 5-1 qui représente l'évolution du critère en fonction de l'ordre du modèle pour deux niveaux de bruit différents, l'ordre du système simulé étant 2. La cassure pour $n = 2$ est très nette. Signalons que le critère imprimé par notre programme est :

$$C = \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) = 2 \, V(\underline{\theta})$$

Nous avons pu faire d'autres constatations lors de ces simulations. La variance des paramètres augmente dès que l'on dépasse l'ordre du système. Ceci est un test facile à appliquer. D'autre part, nous avons pu observer des difficultés d'inversion de la matrice $V_{\theta\theta}$ quand l'ordre du modèle est très grand devant celui du procédé. Le calcul des dérivées secondes totales est impossible, et la seule estimation possible est celle des moindres carrés, la première. Nous expliquons ceci par le fait que le résidu $e(t)$ devient blanc quand l'ordre du modèle est

trop élevé, car alors il dépend de l'erreur de caractérisation plus que du bruit en sortie, et les paramètres c_i sont nuls.

Un exemple détaillé est présenté en 7-11-2.

5-11-3. Première estimation

Nous allons vérifier que la première estimation faite par le programme, qui suppose les c_i nuls, est identique à celle des moindres carrés, bien que le calcul soit effectué d'une façon différente.

Exemple 5-1

L'équation simulée est du type (3-9)

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) = 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = \xi(t) \end{array} \right.$$

$\xi(t)$ blanc, gaussien, centré.

L'équation est simulée pour deux niveaux de bruit différents :

$$\sigma_{\xi a} = 0,09 \quad \sigma_{\xi b} = 0,9$$

Nous avons utilisé 100 données.

Les résultats sont reportés tableaux 5-1-a et 5-1-b, où θ_{MC} est l'estimation des moindres carrés et $\theta_{O,MV}$ la première estimation du maximum de vraisemblance, les paramètres c_i étant supposés nuls.

On voit sur les tableaux 5-1 que les résultats sont effectivement comparables, un peu meilleurs pour les moindres carrés dont le calcul est plus simple.

θ	θ_{MC}	$\theta_{O,MV}$
- 1,5	- 1,49	- 1,49
0,7	0,69	0,69
0	0,005	0,006
1	0,97	0,98
0,5	0,53	0,53
$\sigma_{\xi} = 0,09$	0,167	0,167

Tableau 5-1-a

θ	θ_{MC}	$\theta_{O,MV}$
- 1,5	- 1,19	- 1,17
0,7	0,41	0,39
0	0,07	0,08
1	0,79	0,83
0,5	1,03	1,04
$\sigma_{\xi} = 0,9$	1,45	1,52

Tableau 5-1-b

5-11-4. Influence de la nature du bruit

Nous avons vu (5-1-2) que l'hypothèse de bruit gaussien est indispensable pour déterminer la fonction de vraisemblance. Elle est aussi nécessaire pour démontrer les propriétés de convergence et de variance minimale de l'estimateur. Cette hypothèse n'est pas vraiment restrictive : en effet le bruit $b(t)$ additif en sortie du système englobe non seulement le bruit de mesure, mais surtout le bruit interne du système. Celui-ci a donc de grandes chances d'être à peu près gaussien. Nous avons cependant tenu à vérifier l'influence de la nature du bruit.

Exemple 5-2

Nous avons simulé à cet effet une équation du type (3-9)

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) - 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = \xi(t) \end{array} \right.$$

où $\xi(t)$ est un bruit blanc, uniformément réparti entre 0 et 1, donc de valeur moyenne 0,5 et d'écart-type 0,29.

Nous avons utilisé 100 données, et nous avons pu constater que dans ce cas, la valeur moyenne de $\xi(t)$ est légèrement différente de la valeur moyenne prévue : nous avons en effet trouvé non pas 0,5 mais 0,54. De même, la variance est 0,31.

Dans cet exemple, on a :

$$C(Z^{-1}) = A(Z^{-1}) = 1 - 1,5 Z^{-1} + 0,7 Z^{-2}$$

et le paramètre Y_0 tenant compte de la valeur moyenne du bruit est (2-12) :

$$Y_0 = 0,54 (1 - 1,5 + 0,7) = 0,108$$

Les résultats d'identification sont reportés tableau 5-2

	θ	θ_{MV}
a_1	- 1,5	- 1,495 $\pm$ 0,006
a_2	0,7	0,697 $\pm$ 0,005
b_0	0	- 0,06 $\pm$ 0,03
b_1	1	1,06 $\pm$ 0,05
b_2	0,5	0,50 $\pm$ 0,04
c_1	- 1,5	- 1,38 $\pm$ 0,15
c_2	0,7	0,66 $\pm$ 0,08
y_0	0,108	0,109 $\pm$ 0,008
σ_ξ	0,31	0,29

Tableau 5-2

On voit sur ce tableau que les résultats sont excellents, bien que le bruit ne soit pas gaussien. Ceci n'est pas illogique. En effet, le critère $V(\underline{\theta}) = \sum \xi^2(t)$ que minimise la méthode du maximum de vraisemblance conserve toute sa

signification physique (erreur de prédiction), même si les $\varepsilon(t)$ ne sont pas gaussiens. Cependant, on ne peut plus alors affirmer que la probabilité des mesures a posteriori est maximale, ou que l'estimateur obtenu est à variance minimale.

5-11-5. Influence du nombre de paramètres relatifs au bruit

On peut s'aider pour déterminer l'ordre du modèle, n , et de p , des valeurs du critère, de la précision des paramètres, de l'allure de la sortie du modèle.

Les paramètres c_i sont relatifs au bruit. Il est vraisemblable que leur influence se fera peu sentir sur le critère ou sur la sortie. Est-il facile de déterminer leur nombre, q , afin d'avoir un modèle exact du générateur de bruit ? Nous allons étudier ce problème sur deux exemples.

Exemple 5-3

L'équation simulée est du type (3-9)

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) - 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = (1 - 0,5 Z^{-1}) \varepsilon(t) \end{array} \right.$$

$\varepsilon(t)$ bruit blanc gaussien, d'écart-type 0,9.

$N = 200$ données

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} C(Z^{-1}) &= (1 - 0,5 Z^{-1}) (1 - 1,5 Z^{-1} + 0,7 Z^{-2}) \\ &= 1 - 2 Z^{-1} + 1,45 Z^{-2} - 0,35 Z^{-3} \end{aligned}$$

donc $q \text{ réel} = 3$

Les résultats sont reportés tableau 5-3.

θ	$\theta_{MV} ; q = 2$	$\theta_{MV} ; q = 3$	$\theta_{MV} ; q = 4$
- 1,5	-1,51 $\pm$ 0,01	- 1,51 $\pm$ 0,01	- 1,51 $\pm$ 0,01
0,7	0,71 $\pm$ 0,01	0,71 $\pm$ 0,01	0,71 $\pm$ 0,01
0	0,06 $\pm$ 0,07	0,06 $\pm$ 0,06	0,06 $\pm$ 0,06
1	1,02 $\pm$ 0,14	0,95 $\pm$ 0,12	0,95 $\pm$ 0,12
0,5	0,48 $\pm$ 0,10	0,49 $\pm$ 0,08	0,50 $\pm$ 0,08
- 2	-1,75 $\pm$ 0,04	- 2,14 $\pm$ 0,06	- 2,13 $\pm$ 0,08
1,45	0,82 $\pm$ 0,03	1,70 $\pm$ 0,11	1,67 $\pm$ 0,18
- 0,35	-	- 0,50 $\pm$ 0,07	- 0,47 $\pm$ 0,18
-	-	-	0,11 $\pm$ 0,08
$\sigma_{\varepsilon} = 0,9$	1,03	0,92	0,92

Tableau 5-3

Plusieurs remarques s'imposent à l'analyse de ce tableau. On constate une diminution de la variance estimée (directement en relation avec le critère à minimiser par (5-5)) lorsqu'on atteint $q = q$ théorique = 3. Mais les paramètres a_j et b_j et leur écart-type sont pratiquement identiques, quel que soit q .

Sur cet exemple, la détermination de q théorique est aisée, grâce à l'analyse de valeurs de la variance et des valeurs des paramètres c_j et de leur précision.

Exemple 5-4

L'équation simulée est (3-10) :

$$y(t) = 1,5 y(t-1) + 0,7 y(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) + e(t)$$

$$e(t) = (1 - Z^{-1} + 0,2 Z^{-2} + 0,2 Z^{-3}) \varepsilon(t) = G(Z^{-1}) \varepsilon(t)$$

$\varepsilon(t)$ bruit blanc, gaussien, centré, d'écart-type 0,9

Dans ce cas,

$$C(Z^{-1}) = G(Z^{-1})$$

et q théorique = 3

$N = 200$ données

Les résultats sont reportés tableau 5-4

θ	$\theta_{MV} ; q = 2$	$\theta_{MV} ; q = 3$	$\theta_{MV} ; q = 4$
- 1,5	-1,51 $\pm$ 0,02	-1,51 $\pm$ 0,02	-1,50 $\pm$ 0,02
0,7	0,70 $\pm$ 0,02	0,70 $\pm$ 0,02	0,69 $\pm$ 0,02
0	0,02 $\pm$ 0,07	0,02 $\pm$ 0,07	0,04 $\pm$ 0,07
1	0,94 $\pm$ 0,10	0,94 $\pm$ 0,10	0,93 $\pm$ 0,10
0,5	0,56 $\pm$ 0,09	0,56 $\pm$ 0,09	0,56 $\pm$ 0,09
- 1	-1,09 $\pm$ 0,07	-1,04 $\pm$ 0,09	-1,06 $\pm$ 0,07
0,2	0,38 $\pm$ 0,07	0,29 $\pm$ 0,13	0,25 $\pm$ 0,09
0,2	-	0,07 $\pm$ 0,08	0,26 $\pm$ 0,09
-	-	-	-0,18 $\pm$ 0,06
0,9	0,97	0,97	0,95

Tableau 5-4

On remarque sur le tableau 5-4 que la détermination des paramètres c_i est dans ce cas plus délicate. En effet, l'examen de la variance semble indiquer que $q = 4$; par contre la valeur numérique de c_3 avec $q = 3$ ($c_3 = 0,07 \pm 0,08$) semble

Indiquer que passer à l'ordre 3 est inutile. On constate l'identité presque parfaite des paramètres a_1 et b_1 dans les 3 cas.

Nous concluons ce paragraphe en disant que si la caractérisation du polynôme $C(Z^{-1})$ est difficile, elle a en fait peu d'influence sur les paramètres a_1 et b_1 du modèle (qui sont quand même les plus importants). Nous signalons d'autre part que la convergence des paramètres c_1 est plus lente que celle des paramètres a_1 et b_1 : ceci provient, à notre avis, de l'initialisation ; dès le départ, on donne à a_1 et b_1 des valeurs proches de l'optimum - méthode des moindres carrés - ce qui n'est pas le cas des c_1 .

5-11-6. Influence des conditions initiales

Nous avons expliqué en 5-1-4-b que notre programme, par souci de simplicité, ne considérerait pas les conditions initiales comme des paramètres à identifier, et nous insistions dans ce cas sur l'importance de centrer la sortie et l'entrée par rapport à leur valeur initiale. L'exemple suivant met en valeur l'influence de ce centrage.

Exemple 5-5

L'équation simulée est du type (3-9)

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) - 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = \xi(t) \end{array} \right.$$

$\xi(t)$: gaussien, centré, d'écart-type 0,90.

Les résultats sont reportés tableau 5-5 : θ_{MV1} représente l'estimateur obtenu par maximum de vraisemblance avec 100 données et valeurs initiales nulles, et θ_{MV2} l'estimateur obtenu avec les 93 dernières données de la série, donc conditions initiales différentes de 0.

θ	θ MV1	θ MV2
-1,5	-1,515 $\pm$ 0,016	-1,490 $\pm$ 0,05
0,7	0,711 $\pm$ 0,013	0,695 $\pm$ 0,04
0	0,093 $\pm$ 0,096	-0,053 $\pm$ 0,17
1	0,842 $\pm$ 0,171	0,839 $\pm$ 0,238
0,5	0,599 $\pm$ 0,135	0,719 $\pm$ 0,215
-1,5	-1,509 $\pm$ 0,089	-0,908 $\pm$ 0,119
0,7	0,686 $\pm$ 0,088	0,173 $\pm$ 0,124
0,9	0,95	1,58

Tableau 5-5

On constate sur ce tableau que la plupart des paramètres a_i et b_i ne sont pas perturbés. Par contre les paramètres c_i sont très différents. Quant à l'écart-type estimé, il a grandement augmenté, et par suite la précision des paramètres (cf. 5-13).

Les premières estimations du bruit sont gravement faussées par les conditions initiales (cf. 5-13). Quand celles-ci ne sont pas nulles, on estime non pas $\varepsilon(1)$ mais $\varepsilon(1) + C_1$, par exemple, au premier instant d'échantillonnage. Comme le système est stable, cette erreur sur les conditions initiales est oubliée au cours du calcul. (Les paramètres c_i sont tout de même perturbés puisqu'ils sont relatifs au bruit). D'autre part, le critère est :

$$V(\underline{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t)$$

Donc le fait d'estimer non pas $\varepsilon(1)$ mais $\varepsilon(1) + C_1$, ... augmente le critère. Du même coup, la variance du bruit estimée est trop grande, et l'écart-type des paramètres qui lui est directement lié.

Pratiquement, il se peut qu'il soit difficile d'avoir un système tout à fait stable ; dans ce cas, on risque une légère erreur sur les valeurs initiales de la sortie et de l'entrée. On peut modifier le calcul du critère de la façon suivante :

$$V(\underline{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{t=j}^N \xi^2(t)$$

j étant choisi pour que l'effet des conditions initiales soit presque annulé.

Dans l'exemple précédent, θ_{MV2} , où nous avons pris $j = 10$, on trouve :

$$\hat{\sigma}_{\xi} = 1,06$$

au lieu de $\hat{\sigma}_{\xi} = 1,58$.

L'écart-type des paramètres est diminué dans les mêmes proportions.

Cette procédure ne modifie pas les paramètres mais permet une meilleure estimation de leur précision.

La méthode du maximum de vraisemblance que nous venons d'étudier dans ce chapitre se révèle très séduisante sur le plan théorique, puisqu'on peut démontrer qu'elle donne l'estimateur à variance minimale dans le cas de bruit gaussien. Une étude expérimentale a pu montrer que cette hypothèse, bien que fondamentale pour la théorie, peut ne pas être respectée pratiquement.

Cependant, la mise en oeuvre de cette méthode est délicate, puisqu'elle fait appel à la programmation non linéaire, et les calculs sont longs. On peut se demander si ses performances sont en rapport avec les difficultés qu'elle pose. C'est à cette question que répond le chapitre suivant.

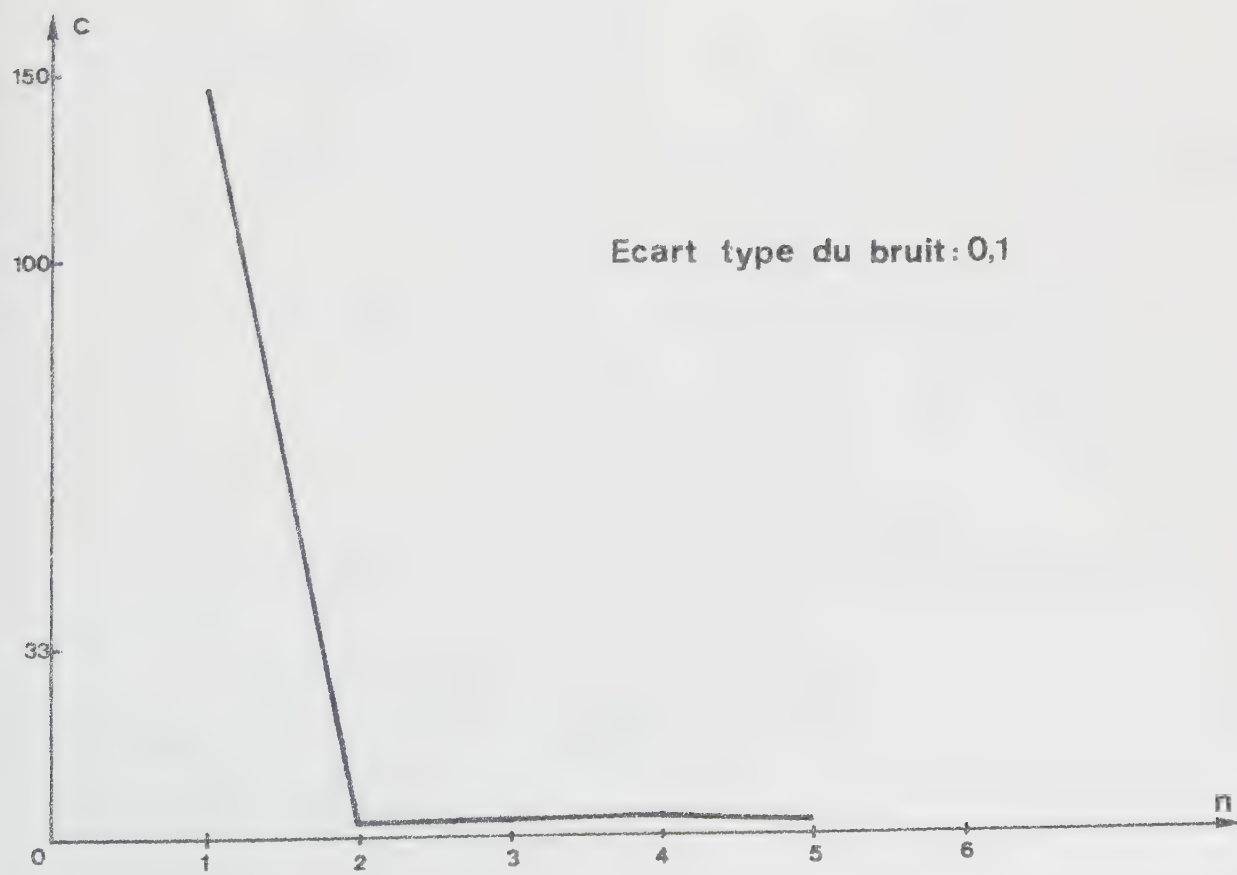
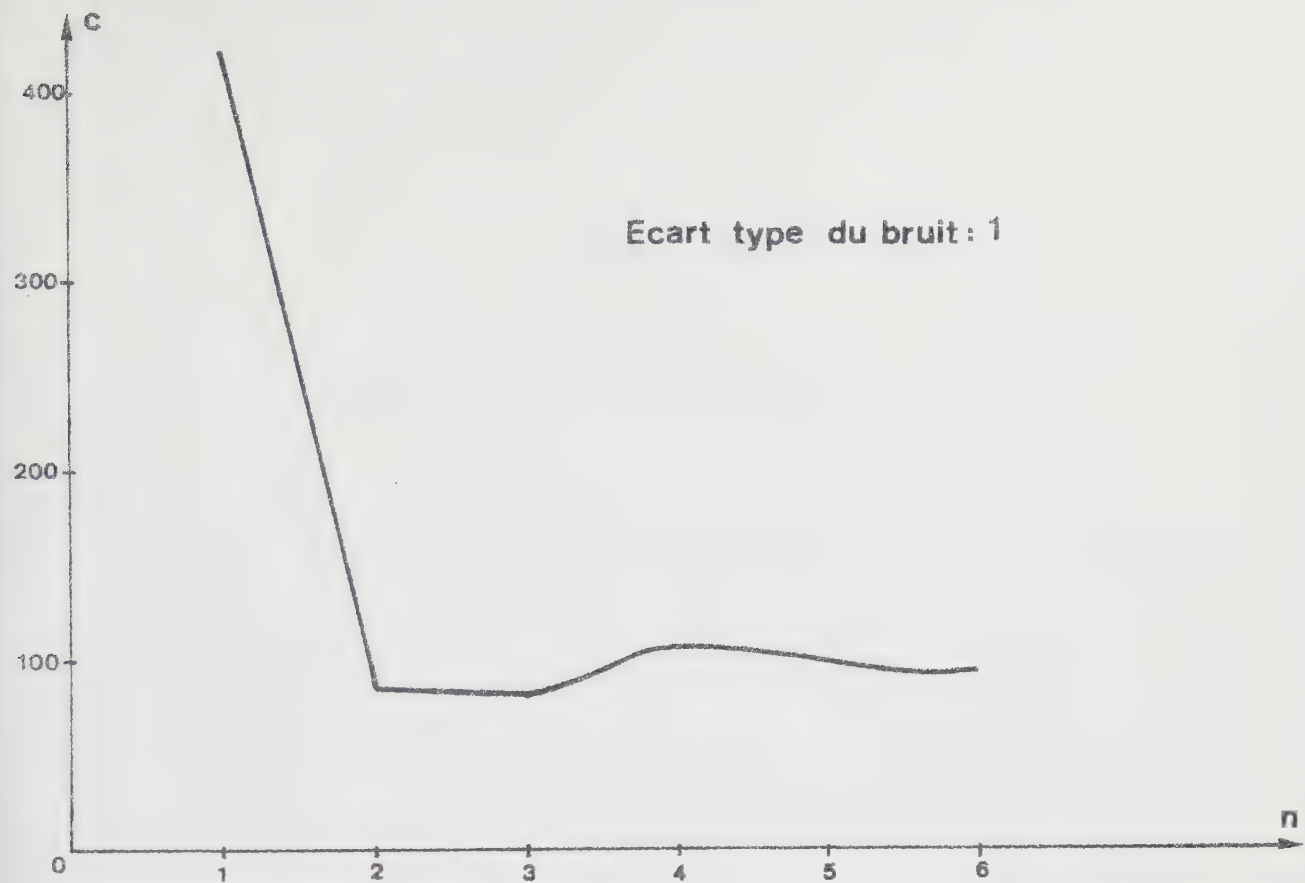


Figure 5.1. Courbes de caractérisation : méthode du maximum de vraisemblance

CHAPITRE 6

COMPARAISON DES METHODES ET DES RESULTATS

Nous allons dans ce chapitre faire une synthèse de ce que nous avons détaillé dans les trois chapitres précédents, relativement aux méthodes des moindres carrés généralisés, de la matrice instrumentale et du maximum de vraisemblance. Nous ne parlerons plus des moindres carrés simples : nous pensons que l'étude fournie dans le chapitre 3 a été suffisante pour prouver que cette méthode donne de mauvais résultats dès que le bruit est important.

La première partie du chapitre est consacrée à une comparaison des méthodes, la seconde compare les résultats.

6-1. COMPARAISON DES METHODES

6-1-1. Analyse des modèles

Nous avons mis le système sous la forme (figure 6-1):

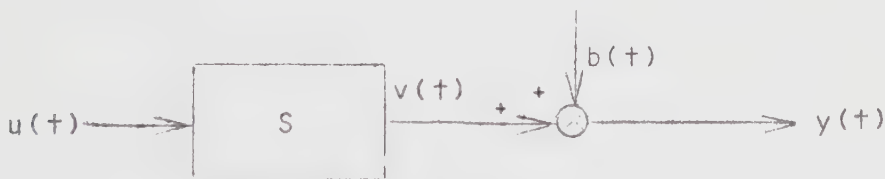


Figure 6-1

$b(t)$ est le bruit additif en sortie, quelconque.

Le fonctionnement de ce système est décrit par :

$$A(Z^{-1}) y(t) = B(Z^{-1}) u(t) + A(Z^{-1}) b(t)$$

Le modèle utilisé par la méthode des moindres carrés généralisés est :

$$(6-1) \quad \begin{cases} A(Z^{-1}) y(t) = B(Z^{-1}) u(t) + e(t) \\ F(Z^{-1}) e(t) = \xi(t) \end{cases}$$

$\xi(t)$: bruit blanc.

Ce modèle est symbolisé figure 6-2

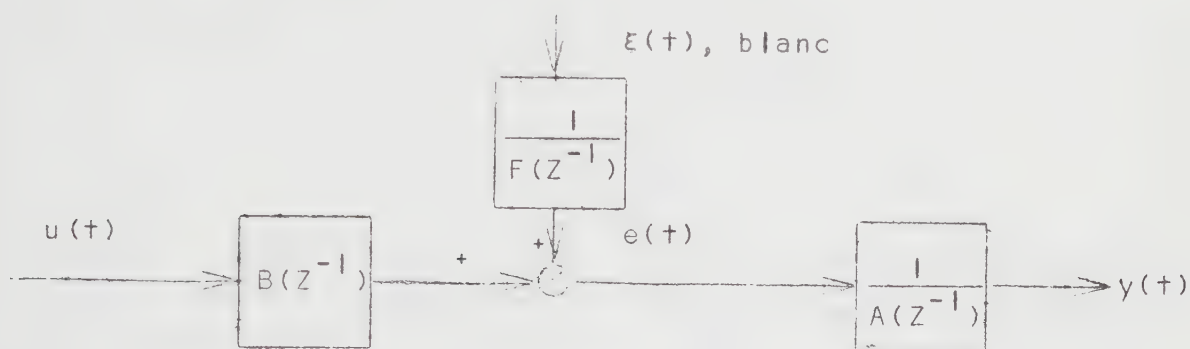


Figure 6-2

La méthode de la matrice instrumentale utilise un modèle moins détaillé :

$$(6-2) \quad A(Z^{-1}) y(t) = B(Z^{-1}) u(t) + e(t)$$

$e(t)$ peut être corrélé.

Ce modèle est symbolisé figure 6-3.

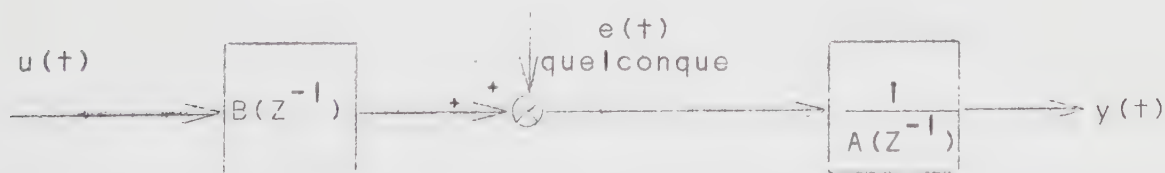


Figure 6-3

La méthode du maximum de vraisemblance utilise le modèle :

$$(6-3) \quad A(Z^{-1}) y(t) = B(Z^{-1}) u(t) + C(Z^{-1}) \xi(t)$$

où $\xi(t)$ est un bruit blanc.

Ce modèle est symbolisé figure 6-4.

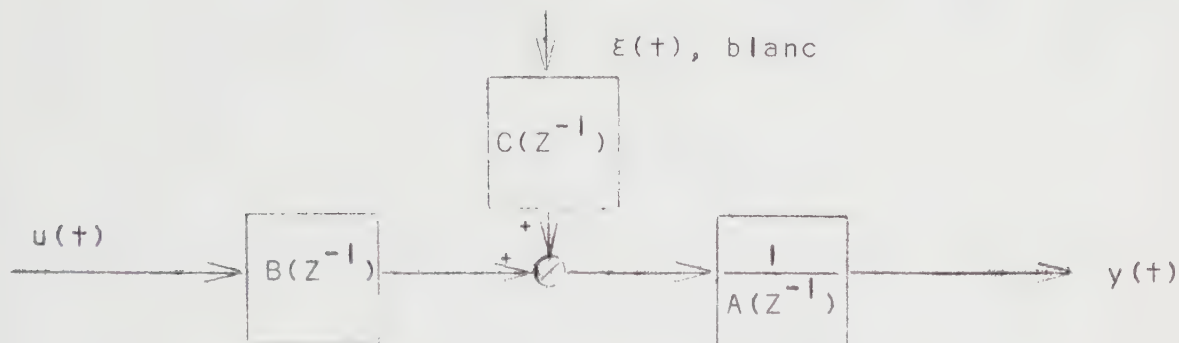


Figure 6-4

Comparons ces divers modèles au schéma du procédé (figure 6-1). Si $b(t)$, le bruit en sortie, est issu d'un bruit blanc par :

$$b(t) = G(Z^{-1}) \varepsilon(t)$$

on constate que :

- Modèle des moindres carrés généralisés :

$$(6-4) \quad A(Z^{-1}) G(Z^{-1}) = \frac{1}{F(Z^{-1})}$$

- Modèle de la matrice instrumentale :

$$e(t) = A(Z^{-1}) \cdot G(Z^{-1}) \varepsilon(t)$$

- Modèle du maximum de vraisemblance :

$$(6-5) \quad A(Z^{-1}) G(Z^{-1}) = C(Z^{-1})$$

Remarquons que les générateurs de bruit déterminés dans le cas des moindres carrés généralisés et du maximum de vraisemblance sont inverses : ceci explique que si dans le premier cas ce filtre est donné analytiquement, dans le second cas, la solution doit être déterminée par programmation non linéaire.

Nous avons déjà donné le calcul de l'erreur de prédiction des modèles (2-1-2-a ; 5-1-1). Cette erreur, dans le cas du modèle (6-2) est :

$$y(t) - \hat{y}(t/t-1) = e(t)$$

et dans le cas du modèle (6-3) :

$$y(t) - \hat{y}(t/t-1) = \varepsilon(t)$$

Comme

$$e(t) = A(Z^{-1}) G(Z^{-1}) \varepsilon(t)$$

la variance de l'erreur est supérieure dans le cas du modèle (6-2).

Quant à l'erreur de prédiction des moindres carrés généralisés, elle peut être calculée comme en 5-1-1 où l'on remplacerait $C(Z^{-1})$ par $F^{-1}(Z^{-1})$.

Nous avons déjà vu (3-111-2) que minimiser l'erreur de prédiction du modèle 6-2 conduit à un estimateur biaisé, l'estimateur des moindres carrés.

6-1-2. Comparaison des méthodes de calcul

Nous allons donner ici des schémas symbolisant les méthodes de calcul dans chaque cas.

La figure 6-5 représente le calcul des moindres carrés généralisés.

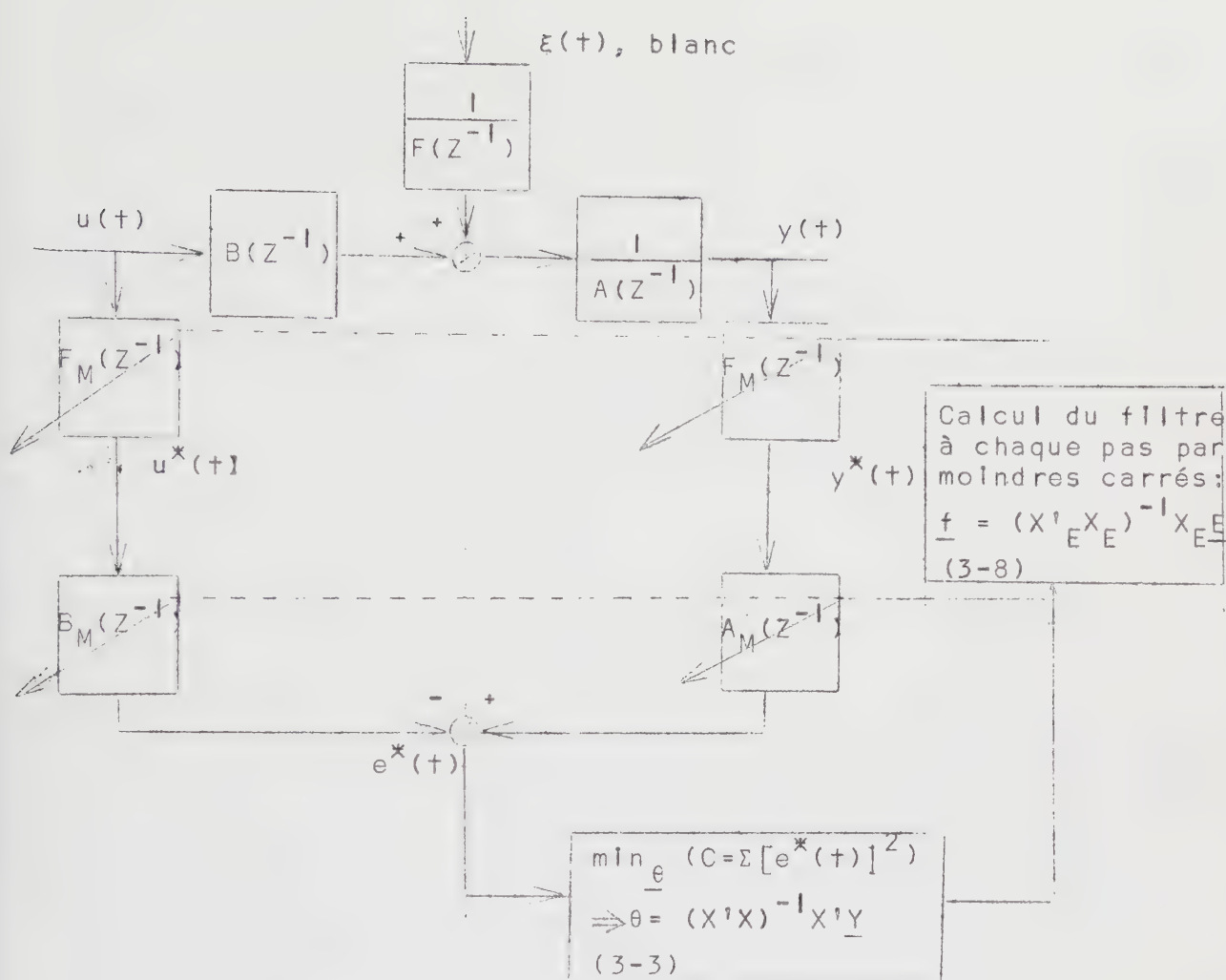


Figure 6-5

La méthode fournit de manière explicite le filtre $F(Z^{-1})$. Elle doit être itérée.

A mesure que le filtre calculé $F_M(Z^{-1})$ se rapproche du filtre $F(Z^{-1})$ les paramètres du modèle $A_M(Z^{-1})$ et $B_M(Z^{-1})$ se rapprochent des paramètres du procédé $A(Z^{-1})$ et $B(Z^{-1})$. Les résidus estimés $e^*(t)$ tendent à devenir identiques au bruit blanc $\xi(t)$. Rappelons que la convergence de $A_M(Z^{-1})$ et $B_M(Z^{-1})$ vers $A(Z^{-1})$ et $B(Z^{-1})$ n'a pu être démontrée, mais que les résultats pratiques sont concluants.

La figure 6-6 donne le principe de calcul de la matrice instrumentale.

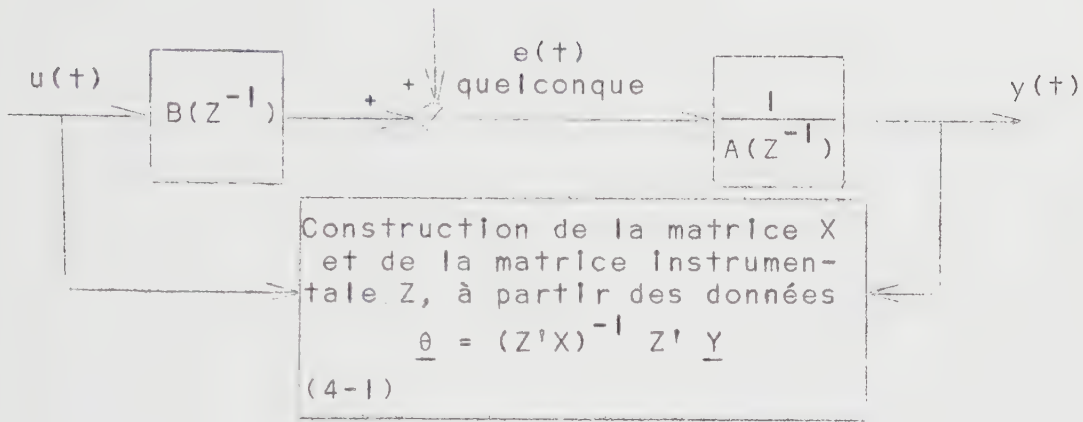


Figure 6-6

On voit sur cette figure que la solution, analytique, ne nécessite aucun calcul itératif. La convergence en probabilité des paramètres du modèle, $A_M(Z^{-1})$ et $B_M(Z^{-1})$, englobés dans le vecteur $\underline{\theta}$, vers les paramètres $A(Z^{-1})$ et $B(Z^{-1})$ est démontrée, si la matrice instrumentale Z possède certaines propriétés (4-2 ; 4-3).

La figure 6-7 donne le principe de la méthode du maximum de vraisemblance.

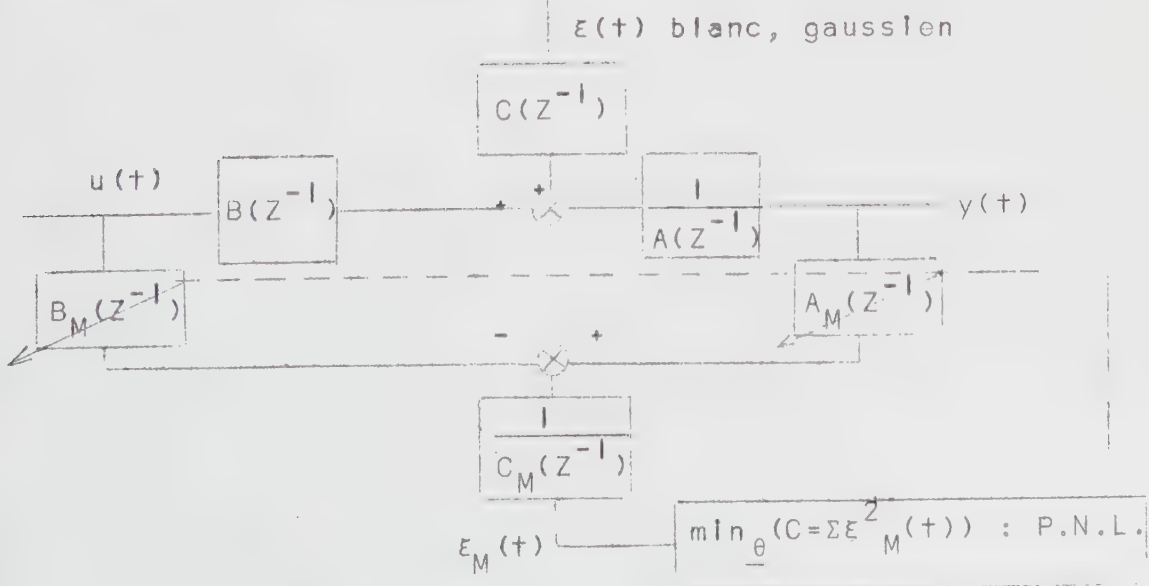


Figure 6-7)

La recherche des paramètres $A_M(Z^{-1})$, $B_M(Z^{-1})$ et $C_M(Z^{-1})$ se fait ici par programmation non linéaire. Le bruit $\xi(t)$ doit être, au moins en théorie, gaussien. Alors l'estimateur est à variance minimale.

Les schémas nous permettent de constater que la méthode la plus simple est celle de la matrice instrumentale. Les principes des moindres carrés généralisés et du maximum de vraisemblance sont proches. Toutefois, dans le premier cas, le filtre $F(Z^{-1})$ est déterminé analytiquement et n'est considéré que comme un intermédiaire permettant de rendre $e^*(t)$ identique au bruit blanc $\xi(t)$, ce qui donne une estimation non biaisée. Dans le second cas, le filtre $C(Z^{-1})$ est considéré comme une partie du système, à identifier ; la solution n'est plus analytique, mais fait appel à la programmation non linéaire.

Rappelons que les conditions initiales sont facilement prises en compte par les méthodes des moindres carrés généralisés et de la matrice instrumentale ; elles doivent être nulles pour la méthode du maximum de vraisemblance, sinon il faut les considérer comme des paramètres à identifier.

6-1-3. Détermination des caractéristiques du bruit

Les méthodes des moindres carrés généralisés et du maximum de vraisemblance fournissent, outre les paramètres du système $A(Z^{-1})$ et $B(Z^{-1})$, les paramètres du générateur de bruit, dans le premier cas $F(Z^{-1})$, dans le second $C(Z^{-1})$. La connaissance du système est donc plus complète lorsqu'on l'identifie par l'une de ces méthodes plutôt que par la matrice instrumentale. On peut déduire de la connaissance des polynômes $F(Z^{-1})$ et $C(Z^{-1})$ celle de $G(Z^{-1})$, générateur du bruit $b(t)$ additif en sortie, par (6-4) et (6-5). On obtient alors le modèle figure 6-8.

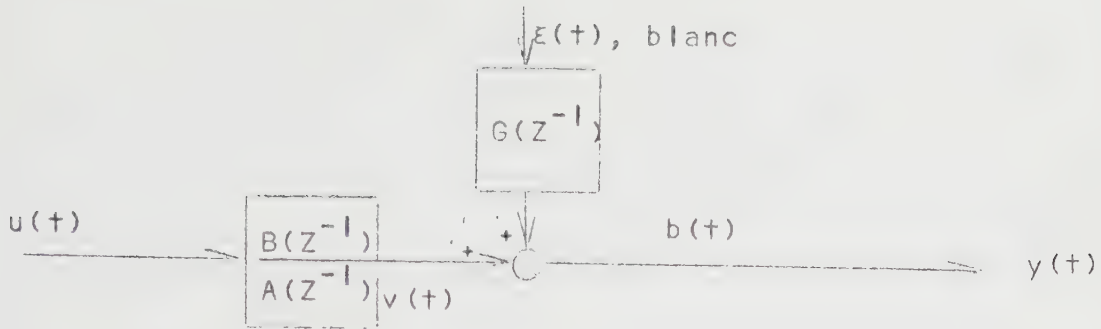


Figure 6-8

La variance estimée par les deux méthodes est celle du bruit blanc $\xi(t)$.

La matrice instrumentale permet seulement d'estimer les résidus $e(t)$ et leur variance. On peut alors remonter à $b(t)$:

$$e(t) = A(Z^{-1}) b(t)$$

mais pas à $\xi(t)$.

Nous avons pu constater en 3-III-4 que le filtre $F(Z^{-1})$ déterminé n'est pas très précis. Nous avons pu remarquer en 5-II-5 que l'on pouvait se permettre une erreur sur le polynôme $C(Z^{-1})$, en particulier sur son ordre, sans perturber l'identification des polynômes $A(Z^{-1})$ et $B(Z^{-1})$. Par contre, notre étude expérimentale relative à la matrice instrumentale en 4-II-3 nous a montré que la détermination d'un coefficient K correct, (K représentant le retard à apporter aux données pour construire la matrice instrumentale Z), est très importante. Si q représente le degré de corrélation du résidu, ordre du polynôme $G(Z^{-1}) A(Z^{-1})$, on doit absolument prendre $K \geq q$.

6-1-4. Facilités de caractérisation

Nous avons vu en 3-III-3, 4-II-2, 5-II-2, que les courbes représentant l'évolution du critère en fonction de l'ordre n du modèle sont d'une aide précieuse pour la détermination de l'ordre optimal du modèle n_0 .

Les courbes (courbes 3-3, 4-1, 5-1) présentent toutes la même cassure quand l'ordre du modèle atteint celui du système. On constate cependant que dans le cas des moindres carrés et du maximum de vraisemblance, le critère reste stationnaire à partir de $n = n_0$; dans le cas de la matrice instrumentale, il augmente brutalement quand $n \gg n_0$.

6-1-5. Comparaison des programmes et du temps de calcul

Nous tenons à souligner que l'on aurait vraisemblablement pu élaborer des programmes de moindre encombrement que les nôtres ; nous avons fait des programmes très généraux, et d'une lecture aisée, afin que d'autres personnes puissent les utiliser facilement (nombreuses cartes commentaires). Rappelons qu'ils sont écrits en FORTRAN IV.

a) Encombrement

- Moindres carrés généralisés :

- . programme principal : 130 cartes
- . 14 appels de sousroutines de calcul matriciel (soustraction, produit, inversion, transposition, multiplication par un scalaire, isolement de la diagonale).

- Matrice instrumentale :

- . programme principal : 79 cartes
- . 8 appels de sousroutines de calcul matriciel (soustraction, produit, transposition, inversion).

- Maximum de vraisemblance :

- . programme principal : 190 cartes
- . sousroutines nécessaires à la méthode (calcul du critère, du gradient, des dérivées secondes) : 190 cartes.
- . 7 appels de sousroutines de calcul matriciel (produit, inversion, isolement de la diagonale, multiplication par un scalaire).

b) Temps de calcul

Nous donnons à titre indicatif le temps de calcul,

avec le système CP/CMS, des trois méthodes, sur le même exemple.

- Moindres carrés généralisés : 1,76 secondes
- Matrice instrumentale : 0,88 secondes
- Maximum de vraisemblance : 5,99 secondes.

On voit que le maximum de vraisemblance est de loin la méthode qui occupe le plus de place en machine, et dont le déroulement est le plus long. Les moindres carrés généralisés sont légèrement plus encombrants que la matrice instrumentale. Ils nécessitent aussi plus de temps de calcul (calcul du filtre et itérations supplémentaires). Mais pour déterminer correctement le paramètre K de retard de la matrice instrumentale, il faut essayer plusieurs valeurs, donc exécuter le programme plusieurs fois. Globalement donc, nous pensons pouvoir dire que les deux méthodes sont équivalentes sur le plan numérique.

6-11. COMPARAISON DES RESULTATS

Rappel

Les systèmes simulés sont du type (3-9) ou (3-10).

Dans le premier cas :

$$(3-9) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(t) + \sum_{i=1}^n a_i v(t-i) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = G_1(Z^{-1}) \xi(t) \end{array} \right.$$

où $\xi(t)$ est un bruit blanc de variance connue σ_ξ^2

Dans ce cas, on a :

$$C(Z^{-1}) = G_1(Z^{-1}) \cdot A(Z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^q c_i Z^{-i}$$

Les moindres carrés généralisés et le maximum de vraisemblance estiment σ_ξ . La matrice instrumentale estime l'écart-type des résidus σ_e .

$$e(t) = A(Z^{-1}) \cdot G_1(Z^{-1}) \xi(t) = C(Z^{-1}) \xi(t)$$

$$(6-6) \quad \Rightarrow \quad \sigma_e^2 = \sigma_\xi^2 \left(1 + \sum_{i=1}^q c_i^2 \right)$$

Dans le cas de l'équation (3-10) on a :

$$(3-10) \quad \begin{cases} y(t) + \sum_{l=1}^n a_l y(t-l) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i) + e(t) \\ e(t) = G_2(Z^{-1}) \varepsilon(t) \end{cases}$$

$\varepsilon(t)$: blanc, de variance connue σ_ε^2

Dans ce cas :

$$C(Z^{-1}) = G_2(Z^{-1})$$

Les moindres carrés généralisés et le maximum de vraisemblance fournissent une estimation de σ_ε , la matrice instrumentale de σ_e , donnée par (6-6)

Nous donnons, pour chaque équation simulée, le rapport bruit sur signal, r , que nous avons défini de la façon suivante :

- équation (3-9)

$$r = \frac{\sigma_b}{\sigma_y}$$

σ_b est l'écart-type du bruit additif en sortie :

$$\sigma_b^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \sum g_{l,1}^2)$$

σ_y est l'écart-type de la sortie que nous avons calculé de la façon suivante : soit N le nombre de mesures $y(t)$ utilisées ; alors :

$$y_M = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - y_M)^2$$

- équation (3-10)

$$r = \frac{\sigma_e}{\sigma_y}$$

Les résultats seront présentés sous forme de tableau organisés comme le tableau 6-0.

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
a_i			
b_i			
	-	-	
c_i	-	-	
	-	-	
σ_ξ		-	
σ_θ	-		-

Tableau 6-0

θ_{MCG} est l'estimateur des moindres carrés généralisés, θ_{MI} celui de la matrice instrumentale, θ_{MV} celui du maximum de vraisemblance; σ_ξ l'écart-type du bruit blanc que l'on peut estimer avec les moindres carrés généralisés et le maximum de vraisemblance, et σ_θ l'écart-type des résidus que l'on peut estimer avec la matrice instrumentale.

Nous allons présenter les résultats pratiquement toujours sur le même système ; seules les conditions sur le bruit (en particulier sa corrélation ou son niveau) ou les conditions d'expérimentation changeront d'un exemple à l'autre. Nous avons

déjà justifié cette présentation en disant que c'est celle qui nous semblait le mieux dégager les résultats.

L'entrée utilisée a toujours été une séquence binaire pseudo-aléatoire de niveaux ± 1 . Nous reviendrons sur le choix des entrées dans le chapitre 7.

Exemple 6-1 : précision numérique

La façon la plus simple et la plus efficace pour comparer les performances de chaque programme sur le plan numérique est d'identifier un système non bruité.

L'équation simulée est :

$$y(t) - 1,5 y(t-1) + 0,7 y(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2)$$

Nous avons utilisé 100 données.

Les résultats sont reportés tableau 6-1

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,5	-1,49 999	-1,50 002	-1,50 000
0,7	0,69 999	0,70 001	0,70 000
0	0,00 000	0,00 000	-0,00 000
1	0,99 999	0,99 999	1,00 000
0,5	0,50 001	0,49 998	0,50 000
0	-	-	-0,752
0	0	-	0
0	-	0	-

Tableau 6-1 : $r = 0$

Les résultats sont parfaitement comparables. On peut noter que le programme du maximum de vraisemblance détermine un paramètre c_1 alors qu'il n'y a pas de bruit ; de même le programme des moindres carrés généralisés calcule un filtre et filtre les données. Ceci n'est pas choquant : ce sont les erreurs numériques qui sont prises en compte par les programmes comme du bruit. On pourrait laisser les programmes itérer ainsi un grand nombre de fois : les paramètres c_1 (ou bien f_1) ont des valeurs sans aucun rapport avec les conditions de l'expérimentation, mais qui font diminuer le critère (de 10^{-5} à 10^{-6} par exemple) ; alors les tests d'arrêt ne sont pas pris en compte. Cependant les paramètres a_1 et b_1 oscillent autour de leur vraie valeur.

Exemple 6-2 : Cas d'un résidu blanc

Nous avons voulu tester le comportement des trois méthodes devant un résidu blanc. Dans ce cas, nous l'avons vu à l'exemple 3-1 (3-III-4), les moindres carrés généralisés n'apportent aucune amélioration par rapport aux moindres carrés ; il doit en être de même des deux autres méthodes.

L'équation simulée est du type (3-10) :

$$\begin{cases} y(t) - 1,5 y(t-1) + 0,7 y(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) + e(t) \\ e(t) = \xi(t) \end{cases}$$

$\xi(t)$: blanc, gaussien, centré, d'écart-type 0,9.

Les résultats sont reportés tableau 6-2. Nous avons utilisé 200 données.

Nous voyons sur ce tableau qu'effectivement les résultats sont comparables. On remarquera que dans ce cas les paramètres c_1 recherchés sont effectivement nuls, ce qui n'était pas le cas de l'exemple 6-1 ; ici, quand le programme cherche à attribuer une valeur différente de 0 à c_1 , il trouve un critère supérieur à celui trouvé pour $c_1 = 0$ et s'arrête (il ne compare pas deux infiniment petits comme dans le cas précédent).

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,5	-1,53	-1,54	-1,51
0,7	0,71	0,72	0,70
0	0,09	0,07	0,08
1	0,99	0,99	1,01
0,5	0,55	0,53	0,57
0	-	-	0
0,9	0,94	-	0,94
0,9	-	0,94	-

Tableau 6-2 $r = 21,5 \%$

Les deux exemples 6-1 et 6-2 nous permettent de dégager les conclusions suivantes : les trois méthodes fournissent les mêmes résultats en l'absence de bruit, donc les différences de comportement seront dues à la présence de bruit sur le système ; les trois méthodes fournissent les mêmes résultats en présence de résidu blanc, donc les différences de comportement seront dues à la façon dont chacune tient compte de la corrélation des résidus.

Exemple 6-3 : Influence du niveau de bruit

Nous allons identifier le même système pour différents écart-type du bruit.

L'équation simulée est du type (3-9) :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) - 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t) + 0,5 u(t-1) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = \varepsilon(t) \end{array} \right.$$

$\xi(t)$: blanc, centré, gaussien, d'écart-type :

$$\sigma_{\xi_a} = 0,09 \quad ; \quad \sigma_{\xi_b} = 0,45 \quad ; \quad \sigma_{\xi_c} = 0,9$$

Nous avons utilisé 100 données.

Les résultats sont reportés tableaux 6-3-a, 6-3-b, 6-3-c.

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,5	-1,498 $\pm$ 0,003	-1,50	-1,502 $\pm$ 0,002
0,7	0,699 $\pm$ 0,003	0,70	0,701 $\pm$ 0,001
0	0,012 $\pm$ 0,011	0,01	0,009 $\pm$ 0,010
1	0,974 $\pm$ 0,016	0,98	0,980 $\pm$ 0,017
0,5	0,529 $\pm$ 0,013	0,52	0,510 $\pm$ 0,013
-1,5	-	-	-1,51 $\pm$ 0,08
0,7	-	-	0,69 $\pm$ 0,08
0,09	0,12	-	0,093
0,18	-	0,17	-

Tableau 6-3-a : $r = 1,9 \%$

On note sur le tableau 6-3-a la qualité de l'identification avec les trois méthodes dans le cas de niveau de bruit faible. On remarque, dans le cas des méthodes fournissant l'écart-type des paramètres, que celui-ci détermine un intervalle de confiance fort convenable.

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,5	-1,48 $\pm$ 0,02	-1,53	-1,51 $\pm$ 0,01
0,7	0,69 $\pm$ 0,01	0,72	0,71 $\pm$ 0,01
0	0,06 $\pm$ 0,06	0,03	0,05 $\pm$ 0,05
1	0,86 $\pm$ 0,08	0,88	0,92 $\pm$ 0,08
0,5	0,67 $\pm$ 0,07	0,59	0,55 $\pm$ 0,07
-1,5	-	-	-1,50 $\pm$ 0,09
0,7	-	-	0,68 $\pm$ 0,09
0,45	0,59	-	0,48
0,9	-	0,86	-

Tableau 6-3-b. $r = 9,5 \%$

Sur le tableau 6-3-b, on voit que les résultats sont moins bons qu'en 6-3-a ; il y a plus de bruit. Notons que l'écart-type des paramètres a augmenté.

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,5	-1,45 $\pm$ 0,03	-1,64	-1,515 $\pm$ 0,016
0,7	0,66 $\pm$ 0,03	0,79	0,711 $\pm$ 0,013
0	0,13 $\pm$ 0,11	0,07	0,093 $\pm$ 0,096
1	0,70 $\pm$ 0,16	0,74	0,842 $\pm$ 0,171
0,5	0,88 $\pm$ 0,14	0,61	0,599 $\pm$ 0,135
-1,5	-	-	-1,509 $\pm$ 0,089
0,7	-	-	0,686 $\pm$ 0,088
0,9	1,14	-	0,95
1,75	-	1,83	-

Tableau 6-3-c. $r = 19,5 \%$

L'examen de ces trois tableaux amènent les remarques suivantes :

- Les résultats sont d'autant meilleurs qu'il y a moins de bruit (ce qui n'est guère surprenant !)
- Les paramètres b_j sont moins bien identifiés que les paramètres a_j
- La précision diminue quand le niveau de bruit augmente ; remarquons que l'intervalle de confiance $\theta_j + \Delta\theta_j$ fourni par le maximum de vraisemblance contient généralement la vraie valeur du paramètre, ce qui n'est pas le cas des moindres carrés généralisés.

Notons encore que la précision est moins bonne sur les c_j que sur les autres paramètres.

- Les résultats fournis par les moindres carrés généralisés et la matrice instrumentale sont assez semblables. Ceux du maximum de vraisemblance sont très nettement meilleurs dans le cas de niveau de bruit moyen ou fort.

Exemple 6-4 : Influence d'une bonne caractérisation

On peut facilement se rendre compte sur les tableaux 6-3 que le paramètre b_0 est nul ; ceci est particulièrement clair dans le cas des moindres carrés généralisés et du maximum de vraisemblance, grâce à l'examen de l'écart-type de ce paramètre. Nous allons donner les résultats de l'identification du même système, dans les cas b et c, en imposant cette fois un retard d'une période d'échantillonnage et $p = 1$.

Les résultats sont reportés tableaux 6-4-a et 6-4-b.

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,5	-1,48 $\pm$ 0,02	-1,53	-1,51 $\pm$ 0,01
0,7	0,69 $\pm$ 0,01	0,72	0,71 $\pm$ 0,01
1	0,93 $\pm$ 0,05	0,89	0,99 $\pm$ 0,04
0,5	0,63 $\pm$ 0,06	0,59	0,52 $\pm$ 0,06
-1,5	-	-	-1,49 $\pm$ 0,08
0,7	-	-	0,67 $\pm$ 0,09
0,45	0,59	-	0,47
0,9	-	0,85	-

Tableau 6-4-a. $r = 9,5 \%$

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,5	-1,46 $\pm$ 0,03	-1,63	-1,51 $\pm$ 0,02
0,7	0,67 $\pm$ 0,03	0,79	0,71 $\pm$ 0,01
1	0,85 $\pm$ 0,10	0,75	0,98 $\pm$ 0,09
0,5	0,78 $\pm$ 0,12	0,61	0,53 $\pm$ 0,12
-1,5	-	-	-1,50 $\pm$ 0,09
0,7	-	-	0,67 $\pm$ 0,09
0,9	1,15	-	0,95
1,75	-	1,82	-

Tableau 6-4-b. $r = 19,5 \%$

On constate sur ces tableaux et en les comparant aux tableaux 6-3-b et 6-3-c que les b_i sont nettement améliorés. Les a_i ont peu changé. Remarquons sur le tableau 6-4-b que malgré le niveau de bruit élevé, le maximum de vraisemblance donne des résultats excellents.

Exemple 6-5 : Influence du nombre de données

Nous allons maintenant regarder quelle amélioration on peut attendre de l'augmentation du nombre de données.

L'équation simulée est celle de l'exemple 6-3, avec l'écart-type $\sigma_{\xi_C} = 0,9$. Nous avons ici utilisé 200 données. Les résultats sont reportés tableau 6-5.

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,5	-1,46 $\pm$ 0,02	-1,67	-1,51 $\pm$ 0,01
0,7	0,66 $\pm$ 0,02	0,81	0,71 $\pm$ 0,01
0	0,06 $\pm$ 0,07	-0,11	0,06 $\pm$ 0,07
1	0,83 $\pm$ 0,11	0,98	0,95 $\pm$ 0,12
0,5	0,73 $\pm$ 0,09	0,46	0,52 $\pm$ 0,09
-1,5	-	-	-1,53 $\pm$ 0,05
0,7	-	-	0,69 $\pm$ 0,05
0,9	1,15	-	0,93
1,8	-	2,10	-

Tableau 6-5. $r = 19,5 \%$

On constate en comparant le tableau 6-5 avec le tableau 6-3-c que l'augmentation du nombre de données se traduit ici par une nette amélioration des paramètres, en particulier des paramètres b_j qui sont les plus perturbés par le bruit.

Exemple 6-6 : Identification de la valeur moyenne du bruit. Influence de la nature du bruit.

L'équation simulée est du type (3-9).

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) - 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = \xi(t) \end{array} \right.$$

$\xi(t)$: blanc, gaussien, de valeur moyenne 1, d'écart-type 0,45

Nous avons utilisé 100 données.

Le paramètre Y_0 à identifier est dans ce cas (cf. 2-12)

$$Y_0 = 1 (1 - 1,5 + 0,7) = 0,2$$

Les résultats sont reportés tableau 6-6-a.

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,5	-1,48 $\pm$ 0,02	-1,53	-1,51 $\pm$ 0,01
0,7	0,69 $\pm$ 0,01	0,72	0,71 $\pm$ 0,01
0	0,06 $\pm$ 0,06	0,03	0,06 $\pm$ 0,05
1	0,86 $\pm$ 0,08	0,88	0,90 $\pm$ 0,08
0,5	0,67 $\pm$ 0,08	0,59	0,55 $\pm$ 0,06
-1,5	-	-	-1,54 $\pm$ 0,11
0,7	-	-	0,70 $\pm$ 0,12
0,2	0,21 $\pm$ 0,02	0,20	0,21 $\pm$ 0,01
0,45	0,59	-	0,48
0,9	-	0,97	-

Tableau 6-6-a. $r = 9,5 \%$

On constate sur ce tableau que le paramètre Y_0 est parfaitement bien identifié par les trois méthodes.

Nous nous sommes posés la question suivante : si le bruit a effectivement une valeur moyenne, et qu'on l'ignore, l'identification est-elle gravement perturbée ? Pour y répondre nous avons simulé l'équation suivante (3-9).

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) - 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) \\ y(t) = v(t) + b(t) \\ b(t) = \varepsilon(t) \end{array} \right.$$

$\varepsilon(t)$: bruit blanc uniformément réparti entre 0 et 1, de valeur moyenne 0,54 et d'écart-type 0,31 sur 100 données. (cf 5-2-4)

$$Y_0 = 0,54 (0,2) = 0,108$$

Le tableau 6-6-b est relatif à l'identification de ce système où l'on ne recherche pas une valeur moyenne ; le tableau 6-6-c donne les résultats avec identification de la valeur moyenne. Nous avons utilisé 100 données.

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,5	-1,49 $\pm$ 0,02	-1,51	-1,50 $\pm$ 0,01
0,7	0,69 $\pm$ 0,02	0,71	0,70 $\pm$ 0,01
0	-0,05 $\pm$ 0,04	-0,04	-0,05 $\pm$ 0,04
1	1,07 $\pm$ 0,06	1,04	1,07 $\pm$ 0,05
0,5	0,48 $\pm$ 0,06	0,52	0,47 $\pm$ 0,05
-1,5	-	-	-1,10 $\pm$ 0,09
0,7	-	-	0,71 $\pm$ 0,09
0,31	0,44	-	0,37
0,54	-	0,59	-

Tableau 6-6-b. $r = 5,7 \%$

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,5	-1,49 $\pm$ 0,01	-1,52	-1,50 $\pm$ 0,01
0,7	0,70 $\pm$ 0,01	0,72	0,70 $\pm$ 0,01
0	-0,04 $\pm$ 0,03	-0,03	-0,06 $\pm$ 0,03
1	1,09 $\pm$ 0,05	1,04	1,06 $\pm$ 0,05
0,5	0,46 $\pm$ 0,04	0,52	0,50 $\pm$ 0,04
-1,5	-	-	-1,38 $\pm$ 0,15
0,7	-	-	0,66 $\pm$ 0,08
0,108	0,115 $\pm$ 0,012	0,109	0,109 $\pm$ 0,008
0,31	0,36	-	0,29
0,54	-	0,58	-

Tableau 6-6-c. $r = 5,7 \%$

On constate en comparant les tableaux 6-6-b et 6-6-c que les paramètres sont assez peu perturbés quand on n'identifie pas la valeur moyenne du bruit.

On notera que bien que le bruit ne soit pas gaussien, les résultats sont bons : les moindres carrés généralisés et la matrice instrumentale n'exigent aucune hypothèse sur sa nature ; ce n'est pas le cas du maximum de vraisemblance, mais nous avons expliqué (5-11-4) que le critère minimisé par cette méthode conserve toute sa signification physique quelle que soit la nature du bruit.

Exemple 6-7 : Etude du gain statique

Voici l'étude d'un autre système qui nous permettra de faire quelques remarques sur la précision du modèle.

L'équation simulée est du type (3-10).

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) - 1,855 y(t-1) + 0,86 y(t-2) = 0,09 u(t-1) + e(t) \\ e(t) = C(Z^{-1}) \varepsilon(t) = (1 - Z^{-1} + 0,2 Z^{-2} + 0,2 Z^{-2}) \varepsilon(t) \end{array} \right.$$

$\varepsilon(t)$: blanc, gaussien, centré, d'écart-type 0,3.

Nous avons utilisé 200 données ; les résultats sont reportés tableau 6-7

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,855	-1,816 $\pm$ 0,033	-1,621	-1,870 $\pm$ 0,04
0,86	0,820 $\pm$ 0,033	0,628	0,874 $\pm$ 0,04
0,09	0,095 $\pm$ 0,016	0,079	0,094 $\pm$ 0,013
-1	-	-	-1,03 $\pm$ 0,10
0,2	-	-	0,30 $\pm$ 0,13
0,2	-	-	0,07 $\pm$ 0,10
0,30	0,31	-	0,29
0,43	-	0,39	-

Tableau 6-7. $r = 14 \%$

Constatons tout d'abord que le polynôme $C(Z^{-1})$ n'est pas très bien identifié : les valeurs estimées des paramètres c_i ne sont pas mauvaises, compte tenu de l'intervalle de confiance qui leur est attribué ; par exemple $c_3 = 0,07 + 0,10 = 0,17 \approx 0,20$; mais vraisemblablement devant un tel modèle, l'utilisateur conclurait que $c_3 = 0$ et chercherait à identifier un polynôme $C(Z^{-1})$ d'ordre inférieur. Ceci n'est pas grave puisque nous avons vu en 5-11-5 que les paramètres a_i et b_i étaient peu perturbés par une mauvaise identification de $C(Z^{-1})$.

Notons encore que dans ce cas, l'estimateur de la matrice instrumentale est moins bon que les autres.

La remarque principale que nous tenons à faire est relative à la précision des paramètres. Le gain statique du

système simulé est :

$$G = \frac{\sum b_i}{1 + \sum a_i} = \frac{0,09}{0,005} = 18$$

Ce paramètre est souvent assez bien connu a priori.

Calculons maintenant le gain du modèle θ_{MV} , par exemple. Signalons à ce propos que si dans nos tableaux nous donnons des résultats arrondis, nos programmes fournissent des résultats plus précis, que nous utilisons pour le calcul du gain.

$$G_{MV} = \frac{0,09421}{0,00458} = 20,5$$

on a donc une erreur de $\approx \frac{2}{20} \approx 10\%$ sur ce paramètre. Si l'on avait utilisé les résultats arrondis, on aurait eu :

$$G_{MV} = \frac{0,094}{0,004} = 23,5$$

l'erreur serait dans ce cas de $\approx \frac{5,5}{20} = 27,5\%$.

Le modèle va généralement servir à des fins de commande ; on n'utilisera alors sans doute que des résultats arrondis compte tenu de la précision obtenue. On serait tenté par exemple de transformer :

$$0,09421 \pm 0,01324$$

en

$$0,09 \pm 0,01$$

Il faudra faire attention au cours de la transformation à l'influence de la simplification apportée. On retrouve ici les problèmes évoqués en 2-III. Il sera assez facile de tenir compte de l'information a priori sur le gain et de trouver une combinaison des a_i et b_i qui donne une valeur correcte à celui du modèle.

Remarquons encore sur cet exemple que poser :

$$a_1 = -1,87 \pm 0,04$$

$$a_2 = 0,87 \pm 0,04$$

c'est-à-dire $a_1 = 1 - a_2$

signifierait que le système possède un intégrateur (gain statique infini).

Exemple 6-8 : effet de lissage

Le fait de déterminer sans biais les paramètres a_1 et b_1 d'une équation récurrente implique que la sortie du modèle, telle que :

$$y_M(t) = \frac{B(Z^{-1})}{A(Z^{-1})} u(t)$$

est proche de la sortie non bruitée du système, $v(t)$ (cf. 2 - figure 2-1). Il y a donc effet de lissage par rapport à l'enregistrement $y(t)$ obtenu en sortie du procédé. Si l'on compare $y(t)$ à $y_M(t)$, le modèle et le système étant soumis à la même entrée - ceci est une distance d'état, toujours intéressante à connaître - il se peut donc qu'on constate une différence très nette sans que ceci remette en cause la qualité de l'identification. Nous mettons ceci en évidence sur les courbes 6-1 et 6-2. La courbe 6-1 représente la sortie du système :

$$v(t) = 1,5 v(t-1) + 0,7 v(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2)$$

$$y(t) = v(t) + \xi(t)$$

$\xi(t)$: centré, gaussien, blanc, d'écart-type 0,9

(l'entrée est une séquence binaire pseudo-aléatoire de niveau ± 1 , de longueur $L = 127$).

Sur la même feuille est portée la sortie du modèle :

$$y_M(t) = +1,463 y_M(t-1) - 0,672 y_M(t-2) + 0,905 u(t-1) + 0,689 u(t-2)$$

obtenu avec les 127 points de la réponse, par moindres carrés généralisés.

La distance d'état, calculée comme suit :

$$D = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y_M(t) - y(t)]^2$$

est dans ce cas :

$$D_1 = 0,95$$

La courbe 6-2 représente la sortie du même modèle comparée avec la sortie du système non bruité ($\xi(t) = 0$). Dans ce cas, la distance d'état est :

$$D_2 = 0,04.$$

On voit donc que la sortie du modèle est d'autant plus proche de celle du système non bruité que l'identification est meilleure ; elle peut cependant être éloignée des enregistrements que l'on possède.

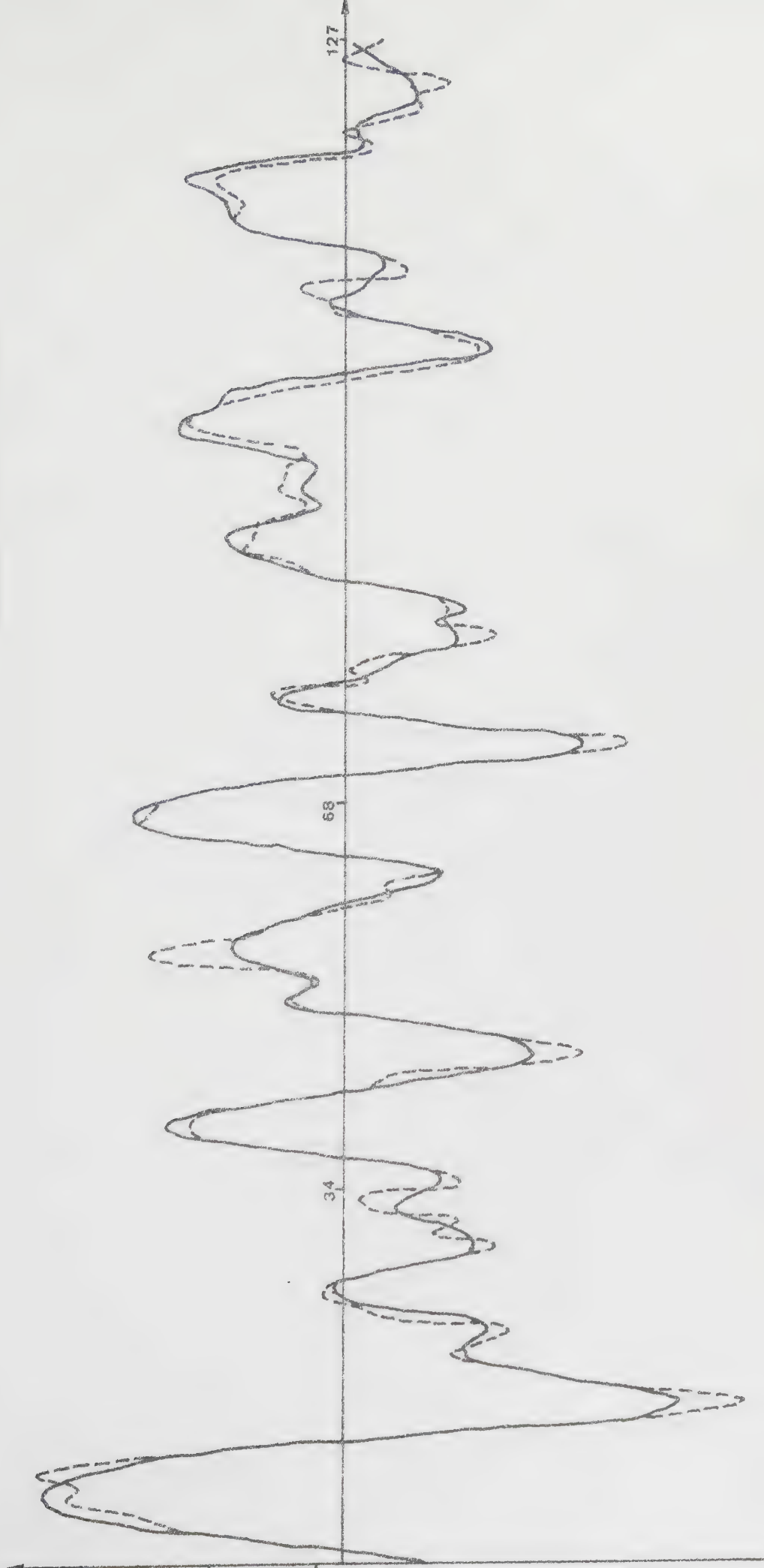
Les quelques résultats présentés dans ce chapitre ont permis de dégager certaines caractéristiques des méthodes utilisées :

- L'expérimentation doit être soignée dans tous les cas : l'augmentation du bruit dégrade le modèle ; le nombre de données utilisées influence beaucoup les résultats ; une caractérisation adéquate permet d'améliorer l'estimateur.
- De façon générale, les paramètres les mieux identifiés sont les paramètres a_i ; les paramètres b_i sont les plus perturbés par le bruit ; les filtres générateurs du bruit ne sont pas toujours correctement déterminés, mais leur qualité influence assez peu l'identification des paramètres a_i et b_i .
- Nous avons toujours obtenu un modèle meilleur et plus précis avec la méthode du maximum de vraisemblance ; les méthodes des moindres carrés généralisés et de la matrice instrumentale ont des performances comparables.

- La méthode du maximum de vraisemblance est la plus longue et la plus coûteuse à employer. Ce défaut est compensé par la qualité de l'estimateur obtenu.

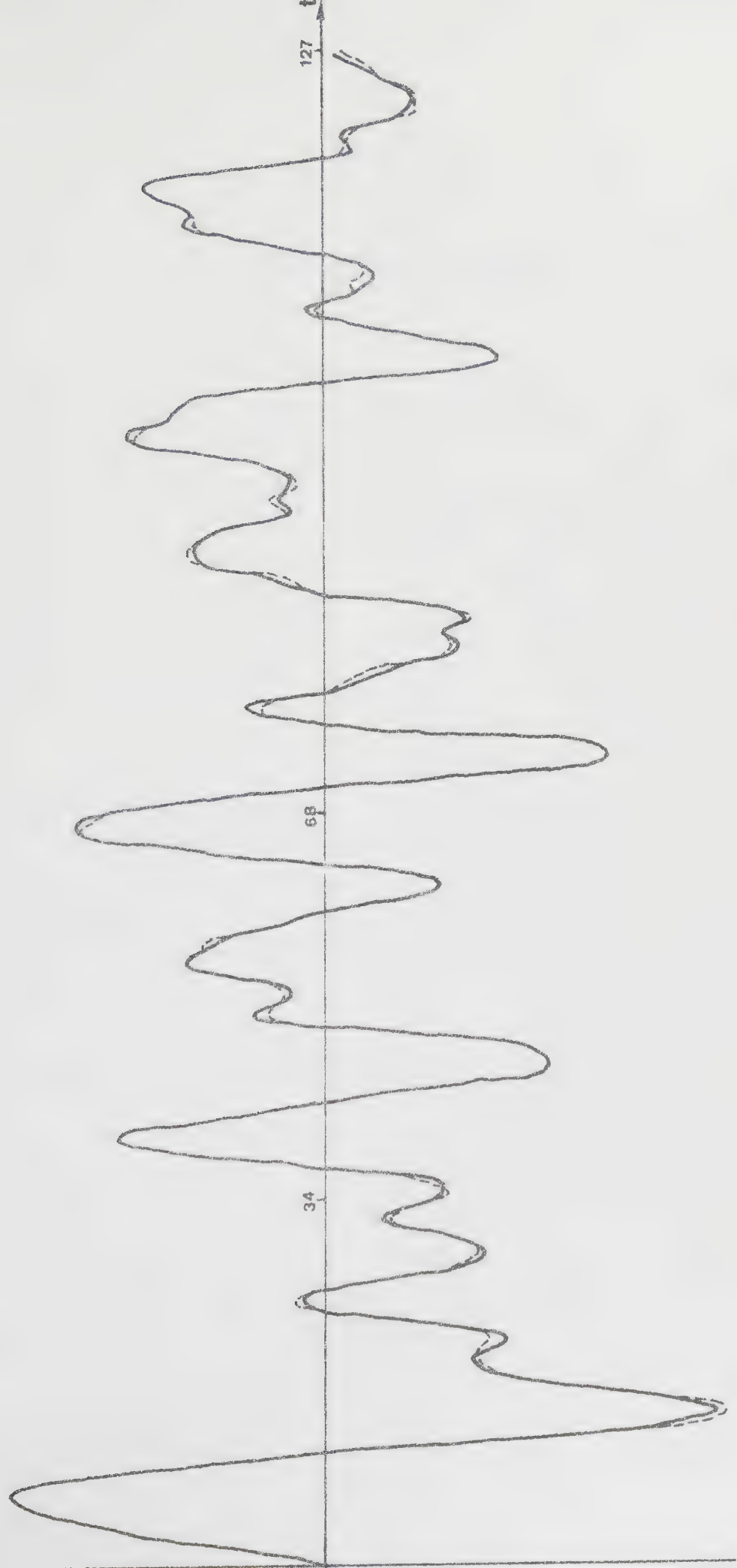
Il ne nous appartient pas de conseiller l'emploi d'une méthode plutôt que d'une autre. Nous avons essayé de donner ici le plus d'informations possible, afin que le lecteur intéressé puisse faire un choix objectif, en fonction des moyens dont il dispose, et de la précision qu'il désire obtenir.

Sortie modèle
Sortie procédé



Courbe 6.1 : Système bruité

— Sortie modèle
- - - - - Sortie procédé



Courbe 6.2 : Système non bruité

CHAPITRE 7

INFLUENCE DE L'ENTREE

Nous n'avons pas encore parlé de l'influence de l'entrée sur l'identification. Il est cependant évident que son choix est primordial. Il est difficile d'établir une loi générale donnant l'entrée idéale à utiliser. Empiriquement, on se doute qu'il faut essayer d'exciter suffisamment le système pour en tirer le plus d'informations possible. C'est à l'ingénieur, placé devant un cas particulier, de décider d'utiliser tel ou tel signal, en fonction des moyens d'expérimentation dont il dispose et des contraintes que lui impose le fonctionnement de son installation.

Nous avons été amenés cependant à faire quelques constatations très générales que nous allons développer dans ce chapitre. Le premier paragraphe traite de l'utilisation de bruits pour l'entrée (et en particulier de bruits binaires). Le second compare les performances de deux entrées souvent utilisées : les séquences binaires pseudo aléatoires et l'échelon.

7-1. UTILISATION DE BRUIT A L'ENTREE

L'entrée idéale est un signal dont l'énergie est équi-répartie sur toutes les fréquences, afin d'exciter tous les modes du système, donc un bruit blanc.

Un signal dont le spectre approche bien celui d'un bruit blanc est maintenant familier aux automaticiens : c'est la séquence binaire pseudo-aléatoire de longueur maximale (22).

Rappelons que ce signal est facile à obtenir numériquement ; il perturbe peu la sortie du système ; il a un spectre proche de celui d'un bruit blanc si sa période est

convenablement choisie (c'est-à-dire petite devant la plus petite constante de temps du système).

Lorsque ce signal est utilisé à l'entrée d'un système, il est logique de choisir sa période égale à la période d'échantillonnage et réciproquement. La condition ci-dessus sur la période de la séquence est parfaitement compatible avec la loi de SHANNON. On est sûr dans ce cas d'avoir toute l'information possible sur l'entrée sans aucune redondance.

Est-il indispensable d'utiliser toute la longueur L de la séquence pour l'identification ? A cette première question nous répondrons non. Le nombre N de mesures utilisées est très important (cf. exemple 6-5) mais aucune amélioration exceptionnelle n'apparaît lorsque N est égal à L .

Peut-on utiliser un nombre de données N supérieur à la longueur L de la séquence (par répétition de la même séquence à l'entrée)? Si le système est peu bruité, il est évident que l'on aura redondance de l'information. Pratiquement avec un système assez bruité (rapport bruit sur signal $r = 9\%$), nous n'avons pas remarqué de différence entre l'identification d'un même nombre d'échantillons, obtenus, d'une part avec répétition de la séquence, d'autre part avec un seul passage d'une séquence plus longue.

On pourrait employer, au lieu d'une séquence binaire, un véritable bruit blanc. Nous avons utilisé, par exemple, comme entrée, le bruit uniformément réparti entre 0 et 1 issu de la sous-routine RANDU (3-111-1) et comparé avec les résultats obtenus lorsque l'entrée est une séquence binaire. [Nous avons dans les deux cas le même rapport (variance du bruit en sortie) sur (variance de l'entrée)] . Les résultats sont identiques. Cependant, dans un cas pratique, il est, à notre avis, préférable d'utiliser une séquence binaire, car, outre la facilité avec laquelle on l'obtient numériquement, l'erreur de quantification est nulle.

On sait qu'une séquence binaire pseudo-aléatoire (S.B.P.A.) possède une valeur moyenne non nulle sur toute sa

longueur. Ceci pourrait être gênant quand le système à identifier possède un pôle à l'origine. Dans ce cas, on peut utiliser une séquence ternaire pseudo-aléatoire (S.T.P.A.), signal dont le spectre est proche de celui d'un bruit blanc et de valeur moyenne nulle sur toute sa longueur (23). Nous avons comparé les propriétés des deux entrées sur le système :

$$\begin{cases} v(t) - 1,966 v(t-1) + 0,966 v(t-2) = 0,034 u(t-1) \\ y(t) = v(t) + \varepsilon(t) \end{cases}$$

$\varepsilon(t)$ blanc, gaussien, centré, d'écart-type 0,05 (ceci correspond à un rapport $r = 5 \%$).

Ce système correspond à l'échantillonnage de $\frac{1}{p(20p+1)}$ à 1 s. Nous avons utilisé 80 données (longueur de la séquence ternaire).

Nous donnons sur le tableau 7-1 les résultats obtenus par moindres carrés généralisés.

θ	Entrée: S.B.P.A.	Entrée: S.T.P.A.
-1,966	-1,93399	-1,93534
0,966	0,93367	0,93524
0,034	0,038	0,033
0,05	0,07	0,07

Tableau 7-1

On constate sur ce tableau que le système a été bien identifié malgré la dérive en sortie due à l'intégrateur quand l'entrée est une séquence binaire. Il est cependant évident que si cette dérive est importante, si la sortie varie dans une gamme très large, on perdra beaucoup de précision.

Toutes les remarques qui précèdent permettent de conclure qu'une séquence binaire pseudo-aléatoire est un signal

particulièrement satisfaisant, et sur lequel on n'a aucune contrainte spéciale, quand il sert d'entrée pour une identification par l'une des méthodes étudiées dans cet ouvrage (ceci n'est plus vrai quand ce signal est utilisé pour identifier la réponse impulsionnelle du système par intercorrélation (22)).

7-11. COMPARAISON DES PERFORMANCES DE SEQUENCES BINAIRES PSEUDO-ALEATOIRES ET D'ECHELONS UTILISES POUR L'IDENTIFICATION

7-11-1. Difficultés posées par le modèle

Le modèle, de façon générale et quelle que soit la méthode, peut s'exprimer de la façon suivante :

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^p b_i u(t-i) + e(t)$$

$y(t)$ et $u(t)$ sont les mesures de la sortie et de l'entrée ; $e(t)$ peut être explicité en fonction d'un bruit blanc (cas du maximum de vraisemblance).

Si l'entrée utilisée est un échelon, on a :

$$u(t) = 1 \quad \forall t$$

Le second membre du modèle se réduit à

$$\sum_{i=0}^p b_i + e(t)$$

Donc, que ce soit pour faire de la prédiction ou pour calculer la sortie du modèle, seule la somme $\sum_{i=0}^p b_i$ est importante, et non la valeur relative de chaque paramètre b_i . Avec une entrée en échelon, on pourra obtenir des b_i parfaitement quelconques et sans rapport avec les véritables zéros du système ; on sera seulement sûr que leur somme est correcte et correspond à celle du système. Par exemple, pour le système non bruité :

$$y(t) - 1,5 y(t-1) + 0,7 y(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2)$$

nous avons pu obtenir, pour une identification menée sur quelques points :

$$b_0 = b_1 = b_2 = 0,5$$

soit :

$$b_0 + b_1 + b_2 = 1,5$$

au lieu de :

$$b_0 = 0 \quad b_1 = 1 \quad b_2 = 0,5$$

Il se pose de plus un problème numérique dans le cas des méthodes des moindres carrés généralisés et de la matrice instrumentale. Si l'on considère la construction des matrices X et Z utilisées pour l'identification (cf 3-1-1 et 4-1-4) on s'aperçoit que poser $p \neq 0$ revient à donner à ces matrices plusieurs colonnes identiques (colonnes où interviennent les valeurs de l'entrée, qui sont alors des colonnes de 1). Alors les matrices $X'X$ et $Z'X$ sont singulières. Leur inversion est impossible.

La détermination du retard est, pour la même raison, délicate : une erreur de 1 période d'échantillonnage sur le retard se traduit uniquement par la présence d'un zéro à la place d'un 1 dans les colonnes relatives à l'entrée, donc 1 fausse valeur sur N utilisées. L'influence est faible. Nous montrerons ceci lors de l'identification de la colonne à distiller pilote du Laboratoire d'Automatique de Grenoble (chapitre 9).

7-11-2. Comparaison des deux entrées vis-à-vis de la caractérisation

Il est clair que l'échelon est une entrée moins riche qu'une séquence binaire pseudo-aléatoire. Comment se traduit ce fait sur la facilité de caractérisation du système ? Pour l'étudier nous avons soumis à ces deux entrées le système suivant :

$$\begin{cases} v(t) - 1,855 v(t-1) + 0,86 v(t-2) = 0,09 u(t-1) \\ y(t) = v(t) + \xi(t) \end{cases}$$

$\xi(t)$ blanc, centré, gaussien, d'écart-type 0,1.

Dans ce cas :

$$e(t) = A(Z^{-1}) \xi(t) = (1 - 1,855 Z^{-1} + 0,86 Z^{-2}) \xi(t)$$

Le système simulé est peu bruité. Il correspond à l'échantillonnage avec une période de 1 s. de

$$\frac{18}{(20 p+1) (10 p+1)}$$

La réponse à un échelon unitaire de ce système est facilement assimilable à première vue à celle d'un premier ordre (en particulier pas de dépassement) (cf. courbe 7-1).

a) Entrée : séquence binaire pseudo-aléatoire (100 données)

Le niveau d'entrée est ± 1 .

Le tableau 7-2 présente les résultats obtenus avec les trois méthodes lorsqu'on suppose le système d'ordre 1 :

$$n = 1 \quad p = 0 \quad R = 1$$

	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
a_1	$-0,99 \pm 0,02$	$-0,981$	$-0,995 \pm 0,016$
b_0	$0,041 \pm 0,02$	$0,076$	$0,061 \pm 0,020$
C	3,44	4,41	3,99

Tableau 7-2

Nous donnons dans ce tableau le critère relatif aux 100 données.

$$C = \hat{\underline{E}}^T \cdot \hat{\underline{E}}$$

Rappelons que dans le cas des moindres carrés généralisés et du maximum de vraisemblance, le résidu estimé $\hat{E}$, doit être identique au bruit blanc $\xi(t)$, alors que dans le cas de la matrice instrumentale, c'est le résidu corrélié $e(t)$ que l'on estime, ce qui explique les différences de valeur.

Nous ne donnons pas les paramètres c_j estimés par la méthode du maximum de vraisemblance : d'une part, on ne peut les comparer avec les résultats des autres méthodes, d'autre part nous avons vu en 5-11-5 que leur nombre q et leur valeur n'influençaient pas les paramètres a_j et b_j . Ils ne sont donc d'aucune utilité pour la caractérisation. Nous alléons ainsi la présentation des résultats. Signalons qu'ici nous avons pris systématiquement $q = n$.

Le tableau 7-3 fournit les résultats lorsqu'on suppose le système d'ordre 2 :

$$n = 2 \quad ; \quad p = 0 \quad ; \quad R = 1$$

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,855	-1,821 $\pm$ 0,03	-2,029	-1,852 $\pm$ 0,003
0,86	0,826 $\pm$ 0,03	1,032	0,857 $\pm$ 0,003
0,09	0,095 $\pm$ 0,009	0,06	0,090 $\pm$ 0,001
C	1,76	4,39	0,94

Tableau 7-3

Remarquons sur ce tableau que l'estimateur fourni par la matrice instrumentale est nettement moins bon que les autres.

Le tableau 7-4 fournit les résultats lorsqu'on suppose le système d'ordre 3 :

$$n = 3 \quad ; \quad p = 0 \quad ; \quad R = 1$$

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
a_1	$-1,91 \pm 0,08$	$-2,54$	$-1,93$
a_2	$1,00 \pm 0,15$	$-7,84$	$1,01$
a_3	$-0,09 \pm 0,08$	$4,34$	$-0,07$
b_0	$0,089 \pm 0,010$	$0,11$	$0,085$
C	$1,66$	74	$1,16$

Tableau 7-4

L'examen des tableaux 7-2, 7-3, 7-4 permet facilement de déterminer l'ordre exact du système, $n = 2$.

On constate pour les méthodes des moindres carrés généralisés et du maximum de vraisemblance :

- une diminution très nette du critère lors du passage de $n = 1$ à $n = 2$. Quand on pose $n = 3$, on retrouve par contre des valeurs semblables à celles obtenues pour $n = 2$.
- la précision du paramètre b_0 dans le cas où $n = 1$ indique que celui-ci est très mal identifié.
- les paramètres a_3 , dans le cas où $n = 3$, sont négligeables par rapport à a_1 et a_2 ; leur précision indique qu'ils sont nuls.

Dans le cas du maximum de vraisemblance, pour $n = 3$, nous avons eu des difficultés numériques à l'inversion de la matrice des dérivées secondes (nous fournissons la valeur des paramètres obtenue avant que cette difficulté se présente, mais nous ne sommes pas en mesure de donner leur précision). Nous avons vu (5-11-2) que ce fait provenait d'un modèle d'ordre trop élevé.

La caractérisation est moins facile dans le cas de la matrice instrumentale. On peut d'emblée éliminer $n = 3$, compte tenu des valeurs relatives des critères. Mais on peut hésiter entre $n = 1$ et $n = 2$; nous n'avons pas dans ce cas la précision des paramètres pour guider notre choix. Cependant comparons les valeurs du gain des modèles dans les deux cas :

$$G_1 = \frac{0,076}{1-0,981} = 4$$

$$G_2 = \frac{0,06}{0,003} = 20$$

Il est invraisemblable que l'utilisateur ne puisse choisir l'ordre exact, compte tenu de ces valeurs et de la connaissance a priori qu'il peut avoir du gain du système (aussi imprécise soit-elle).

Nous allons montrer grâce au tableau 7-5 comment choisir le nombre de paramètres b_i relatifs à l'entrée. Ce tableau donne les résultats fournis par les trois méthodes quand on suppose :

$$n = 2 \quad ; \quad p = 2 \quad ; \quad R = 0$$

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,855	-1,768 $\pm$ 0,03	-2,02	-1,853 $\pm$ 0,003
0,86	0,772 $\pm$ 0,03	1,02	0,858 $\pm$ 0,003
0	0,014 $\pm$ 0,014	0,006	0,006 $\pm$ 0,10
0,09	0,060 $\pm$ 0,018	0,061	0,079 $\pm$ 0,019
0	0,044 $\pm$ 0,016	0,016	0,005 $\pm$ 0,010
C	1,60	4,32	0,93

Tableau 7-5

Il est facile dans les trois cas de deviner que $b_0 = 0$, compte tenu et de sa valeur, et de sa précision quand on peut la connaître. De la même façon, dans le cas du maximum de vraisemblance, on comprend que $b_2 = 0$. Ceci est moins net avec les deux autres méthodes. Mais reportons-nous au tableau 7-3. En comparant les deux résultats, on s'aperçoit que, pour la méthode de la matrice instrumentale, les critères sont pratiquement identiques ; on a donc intérêt à choisir le modèle qui comporte le plus petit nombre de paramètres ; dans le cas des moindres carrés généralisés, le critère est légèrement plus élevé quand le modèle a moins de paramètres ; par contre, l'écart-type des b_j diminue. Ceci indique que le modèle ($p=0$) est meilleur.

L'analyse détaillée de la caractérisation d'un système quand l'entrée est une séquence binaire pseudo-aléatoire nous a permis de montrer que celle-ci est assez facile si l'on sait utiliser convenablement toutes les informations fournies par les méthodes. Nous allons voir s'il en va de même quand l'entrée est un échelon.

b) Entrée : échelon (100 données)

Le tableau 7-6 représente les modèles obtenus par les trois méthodes lorsqu'on suppose le système du premier ordre.

$$n = 1 \quad ; \quad p = 0 \quad ; \quad R = 1$$

	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
a_1	$-0,973 \pm 0,003$	$-0,972$	$-0,974 \pm 0,003$
b_0	$0,53 \pm 0,04$	$0,55$	$0,52 \pm 0,04$
c	$2,02$	$1,98$	$2,13$

Tableau 7-6

Le tableau 7-7 représente les modèles obtenus quand on suppose le système du 2ème ordre.

$$n = 2 \quad ; \quad p = 0 \quad ; \quad R = 1$$

θ	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
-1,855	-0,93 $\pm$ 0,1	-4,10	-1,854 $\pm$ 0,001
0,86	-0,04 $\pm$ 0,1	3,04	0,858 $\pm$ 0,001
0,09	0,57 $\pm$ 0,07	-1,14	0,0908 $\pm$ 0,0006
C	1,98	22	1,02

Tableau 7-7

La comparaison des tableaux 7-6 et 7-7 amène plusieurs remarques.

- Les méthodes des moindres carrés généralisés et de la matrice instrumentale indiquent de toutes les manières possibles que le système est d'ordre 1 : le modèle d'ordre 2 de la matrice instrumentale est aberrant, le critère beaucoup plus élevé que dans le cas de l'ordre 1. Dans le cas des moindres carrés généralisés, le critère ne diminue pas, la valeur du paramètre a_2 et sa précision laissent penser qu'il est nul. Les gains des modèles d'ordre 1 sont, pour les moindres carrés généralisés : 19,8 et pour la matrice instrumentale : 19,6, donc proches du gain théorique : 18.
- La méthode du maximum de vraisemblance permet seule de déterminer l'ordre exact du système. Remarquons que le modèle d'ordre 2 obtenu est excellent (système très peu bruité).

Le tableau 7-8 va nous permettre de vérifier qu'on ne peut déterminer plusieurs paramètres b_i quand l'entrée est un échelon. Pour calculer les estimateurs portés dans ces tableaux, nous avons supposé qu'il y avait deux paramètres b_i .

$$n = 1 \quad ; \quad p = 1 \quad ; \quad R = 0$$

	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
a_1	-0,972	-0,972	-0,973 $\pm$ 0,003
b_0	-4,30	-0,05	0,35 $\pm$ 0,15
b_1	+4,85	0,60	0,18 $\pm$ 0,16
C	1,98	1,98	2,10

Tableau 7-8

Dans le cas des méthodes des moindres carrés généralisés et de la matrice instrumentale, le programme imprime en cours de déroulement un indicateur qui prend une valeur différente de 0 quand les matrices à inverser sont mal conditionnées ; pour les deux méthodes, l'indicateur a pris ici la valeur 2, signalant par là que les difficultés commencent dès la deuxième ligne, donc sont relatives au paramètre b_0 (nous ne pouvons fournir la précision de θ_{MCG}). On constate sur le tableau 7-8 que le paramètre b_0 est presque nul dans l'estimateur de la matrice instrumentale, ce qui indique clairement qu'il faut prendre $p = 0$ et $R = 1$; les paramètres b_1 trouvés par moindres carrés généralisés sont par contre aberrants ; dans le cas du maximum de vraisemblance, c'est leur précision qui signale que la caractérisation n'est pas correcte. Calculons d'autre part la somme $b_0 + b_1$ dans les trois cas :

$$M.C.G : b_0 + b_1 = 0,55$$

$$MI : b_0 + b_1 = 0,55$$

$$MV : b_0 + b_1 = 0,53$$

On peut comparer la valeur de la somme dans chaque cas à la valeur du paramètre b_0 estimée quand on fait $p = 0$ (tableau 7-6). Elles sont presque identiques (cf. 7-11-1).

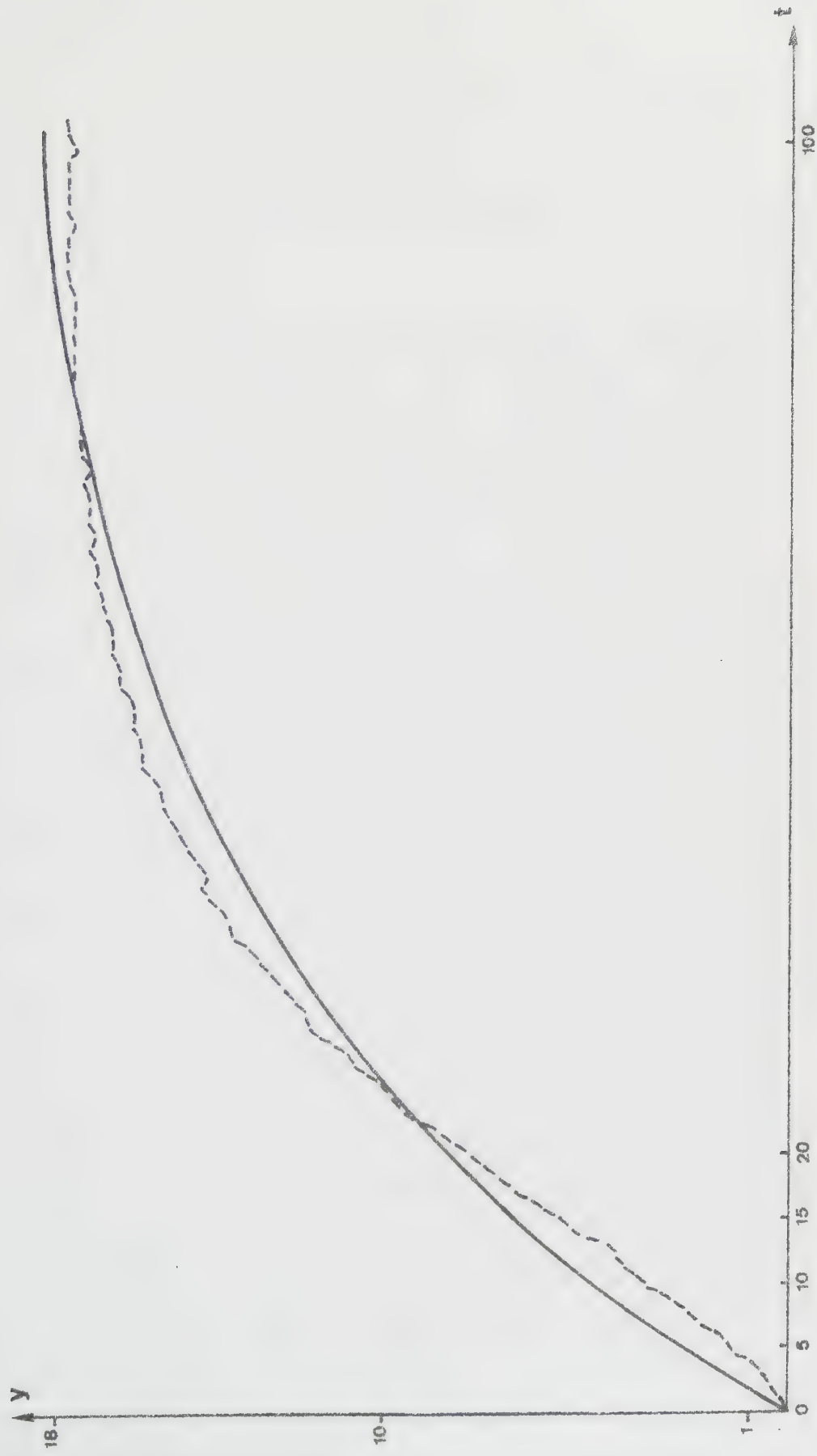
Il nous faut maintenant conclure cette comparaison des performances de l'échelon et des séquences binaires pseudo-aléatoires utilisées comme entrée pour l'identification. Le paragraphe 7-11 nous a permis de montrer que l'échelon se prête mal à l'identification des retards et des zéros du système ; d'autre part, c'est une entrée très pauvre qui ne permet pas de déterminer tous les modes du système, du moins dans le cas de deux des méthodes étudiées ici. On pourrait donc conclure qu'il ne faut pas utiliser cette entrée. Mais c'est là à notre avis aller un peu vite. En effet, les modèles du premier ordre obtenus sont relativement corrects pour suivre la réponse du système à un échelon (cf. Courbe 7-1 : modèle des moindres carrés généralisés - tableau 7-6). Il se peut qu'on puisse s'en contenter. C'est ici qu'intervient *le but du modèle*. S'il s'agit de bien connaître le système, d'établir une commande très élaborée pour optimiser la sortie, il est clair que l'entrée en échelon ne convient pas du tout. Si par contre on peut se contenter d'un modèle approché simple, si on veut par exemple optimiser les changements de point de consigne, alors peut être le modèle obtenu avec une entrée en échelon suffira-t-il.

Ce chapitre nous a permis de constater que la méthode du maximum de vraisemblance se prête mieux que les autres à l'identification avec une entrée en échelon. En effet, elle permet de déterminer un modèle simplifié convenable, et de trouver un modèle plus détaillé, proche du système. Nous avons vu dans le chapitre précédent que les résultats obtenus par cette méthode étaient meilleurs, plus précis ... Mais là, nous venons de mettre en évidence une performance nettement supérieure, et encore plus intéressante. Pourquoi une telle différence ? Nous traitons exactement la même information qu'avec les autres méthodes. De plus notre analyse (6-1) nous a permis de voir que le critère des moindres carrés généralisés et celui du maximum de vraisemblance représentent la même quantité - la variance du bruit blanc $\varepsilon(t)$; les résultats numériques

confirment cette identité. Alors ? Il semble bien que ce soit *la méthode* elle-même qui soit en question, et non la richesse des données, le choix du modèle et du critère. La programmation non linéaire qui fait progresser d'une courbe équi-critère à l'autre (courbes dont la forme est fonction de l'entrée et du système) est plus appropriée à la découverte des véritables paramètres qu'une méthode analytique (qui se contente de chercher des combinaisons convenables de chiffres fournis).

Sortie modèle : $y(t) \left(1 - 0,973Z^{-1} \right) = 0,53Z^{-1} u(t)$

Sortie procédé : $y(t) \left(1 - 1,855Z^{-1} + 0,860Z^{-2} \right) = 0,09Z^{-1} u(t)$



Courbe 7.1

CHAPITRE 8

IDENTIFICATION EN TEMPS REEL

Nous avons jusqu'à présent étudié des méthodes d'identification en temps différé : les données sont fournies par des mesures prises sur le procédé, mais traitées ensuite séparément, indépendamment du fonctionnement du système. Or, de nos jours, les automaticiens s'intéressent de plus en plus à des méthodes en temps réel : le modèle est mis à jour au fur et à mesure que les données lui sont fournies. Ces techniques sont indispensables lorsqu'on a affaire à des systèmes dont les paramètres varient effectivement dans le temps ; elles ont, en outre, un grand intérêt lorsque le système étudié est non linéaire mais traité comme un système linéaire autour d'un point de fonctionnement : les valeurs des paramètres dépendent alors du point de fonctionnement ; elles peuvent de la même façon dépendre de perturbations. D'autre part, l'étude de l'évolution des paramètres d'un système au cours du temps, même s'il est linéaire, est particulièrement riche en renseignements car elle permet l'étude du vieillissement de l'installation (usure d'un catalyseur par exemple) ce qui peut permettre une meilleure planification, une meilleure gestion de l'entreprise. C'est pourquoi nous n'avons pas voulu achever notre étude sans montrer comment s'adaptent les méthodes envisagées précédemment en temps réel. Le modèle utilisé par les trois méthodes est basé sur *les mesures* de l'entrée et de la sortie (rappelons que les critères des moindres carrés et du maximum de vraisemblance sont des *critères prédictifs*). On peut conclure de cette remarque que les méthodes sont bien mieux adaptées au temps réel que des méthodes basées sur une distance d'état (sortie-procédé moins sortie-modèle). En effet, le calcul de la sortie du modèle doit être fait à partir des conditions initiales chaque fois que les valeurs des

paramètres, c'est-à-dire le modèle, changent, donc en principe à chaque pas de l'itération. On conçoit aisément ce qu'un tel calcul peut faire perdre comme efficacité à une méthode en temps réel. Il est pourtant indispensable (24-pp. 80-81).

Nous verrons dans un premier paragraphe comment obtenir par moindres carrés une méthode de calcul en temps réel. Dans le deuxième paragraphe, nous évoquerons le filtre de KALMAN et montrerons comment l'utiliser pour l'identification de paramètres. Ceci nous permettra de poser le problème de la convergence de l'estimateur. Le troisième paragraphe traitera de la matrice instrumentale en temps réel, le quatrième de l'estimation de la variance des résidus. Nous donnerons quelques résultats pratiques dans le cinquième paragraphe.

Nous n'avons pas étudié le maximum de vraisemblance en temps réel. Les algorithmes proposés par I. GUSTAVSSON (12) que nous avons donnés en 5-1-3 se prêtent facilement à un calcul en temps réel du gradient du critère. Mais nous pensons que la longueur des calculs exigés par cette méthode est un trop gros obstacle à une programmation sur petit calculateur industriel en ligne avec un procédé.

8-1. LES MOINDRES CARRES EN TEMPS REEL

Soit N le nombre de mesures effectuées. L'estimateur des moindres carrés est (3-3) :

$$\hat{\theta}_N = (X_N' X_N)^{-1} X_N' Y_N$$

Si l'on acquiert une mesure supplémentaire, cet estimateur devient :

$$\hat{\theta}_{N+1} = (X_{N+1}' X_{N+1})^{-1} X_{N+1}' Y_{N+1}$$

avec :

$$X_{N+1} = \begin{bmatrix} X_N \\ x(N+1) \end{bmatrix} \quad Y_{N+1} = \begin{bmatrix} Y_N \\ y(N+1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 x(N+1) &= \begin{bmatrix} -y(N) & \dots & -y(N-n+1) & u(N+1) & \dots & u(N+1-p) \end{bmatrix} \\
 \text{donc :} & \\
 \begin{bmatrix} X'_N & x'(N+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_N \\ x(N+1) \end{bmatrix} &= \\
 X'_{N+1} X_{N+1} &= X'_N X_N + x'(N+1) x(N+1) \\
 X'_{N+1} Y_{N+1} &= X'_N Y_N + x'(N+1) y(N+1) \\
 \Rightarrow \hat{\theta}_{N+1} &= [X'_N X_N + x'(N+1) x(N+1)]^{-1} [X'_N Y_N + x'(N+1) y(N+1)]
 \end{aligned}$$

En utilisant la formule de calcul matriciel suivante :

$$(A+BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1}+DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

on arrive rapidement au résultat suivant :

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_{N+1} &= \hat{\theta}_N + (X'_N X_N)^{-1} x(N+1) \{1 + x(N+1)(X'_N X_N)^{-1} x'(N+1)\}^{-1} \\
 &\quad [y(N+1) - x(N+1) \hat{\theta}_N]
 \end{aligned}$$

posons :

$$P_N = \sigma^2 (X'_N X_N)^{-1}$$

où σ^2 représente la variance des résidus $e(t)$. En remarquant que cette matrice peut elle aussi être calculée récursivement, on aboutit à l'algorithme suivant :

$$(8-1) \quad \begin{cases} \hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + \underline{K}_{N+1} (y(N+1) - x(N+1) \hat{\theta}_N) \\ \underline{K}_{N+1} = P_N x'(N+1) \{ \sigma^2 + x(N+1) P_N x'(N+1) \}^{-1} \\ P_{N+1} = P_N - \underline{K}_{N+1} x(N+1) P_N \end{cases}$$

Nous sommes passés très rapidement sur la démonstration. On trouvera les calculs détaillés dans (11-pp. 11-14).

Les matrices $\underline{\theta}$, $\underline{K}$ et P peuvent être mises à jour à chaque instant d'échantillonnage grâce à l'acquisition de

$y(N+1)$ et $u(N+1)$; soulignons que le calcul ne nécessite aucune inversion puisque la quantité entre accolades est un scalaire.

Pour initialiser la récurrence (8-1) il faudrait en principe utiliser $n+p+1$ échantillons pour construire la matrice P_0 de départ. En fait, on montre que la valeur initiale $\hat{\theta}_0$ des paramètres a peu d'importance et qu'une initialisation de P_0 à $1/\epsilon$ ($\epsilon \rightarrow 0$), c'est-à-dire une matrice dont tous les éléments sont nuls sauf la diagonale qui est infinie, permet la convergence de l'algorithme (cf. par exemple (6) - Annexe 11).

Nous allons insister sur la signification physique de l'algorithme. Le nouveau vecteur $\hat{\theta}_{N+1}$ est égal à l'ancien $\hat{\theta}_N$ à un terme correctif près. Que représente ce terme ? Il est le produit par un gain K_{N+1} de l'expression :

$$y(N+1) - x(N+1) \hat{\theta}_N = y(N+1) - \hat{y}(N+1/N)$$

qui représente l'erreur de prédiction de l'estimateur $\hat{\theta}_N$. Ceci est parfaitement logique puisque l'estimateur des moindres carrés minimise justement l'erreur de prédiction. L'algorithme peut être symbolisé par un système asservi (cf. figure 8-1).

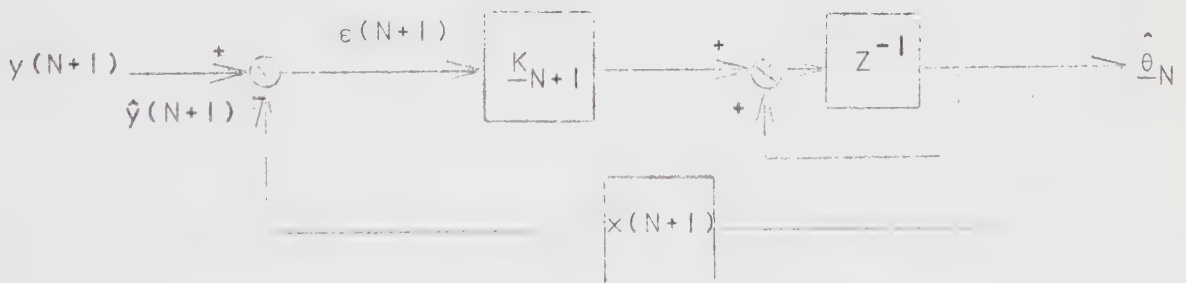


Figure 8-1

La sortie de ce système, $\hat{\theta}_N$, est corrigée, avec le gain $K_{(N+1)}$ tant que l'erreur $\epsilon(N+1)$ entre sortie mesurée et sortie prédite n'est pas nulle.

La matrice P_N représente la matrice de covariance des paramètres (3-4). Cette remarque permet de comprendre l'initialisation préconisée plus haut, qui a pu paraître arbitraire : elle doit permettre de prendre en compte les connaissances a

priori ; si on ignore tout des paramètres du système, on leur attribue une valeur quelconque et une variance, qui mesure la précision de cette valeur, infinie.

8-11. LE FILTRE DE KALMAN. LES MOINDRES CARRES GENERALISES EN TEMPS REEL

Nous allons maintenant montrer comment les moindres carrés s'insèrent dans le cadre général de la prédiction et de l'identification.

8-11-1. Rappels sur le filtre de KALMAN (25)

KALMAN considère un système discret multivariable d'ordre m mis sous forme de variables d'état :

$$\underline{X}_{K+1} = A_K \underline{X}_K + B_K \underline{U}_K + \underline{W}_K$$

$$\underline{Y}_K = C_K \underline{X}_K + \underline{V}_K$$

où $\underline{X}_K$ est le vecteur d'état de dimensions m , $\underline{Y}_K$ le vecteur des sorties, $\underline{U}_K$ le vecteur des entrées et $\underline{W}_K$ et $\underline{V}_K$ représentent respectivement le bruit sur le système et le bruit de mesure, bruits centrés, blancs et indépendants :

$$E.M.\{\underline{V}_K\} = \underline{0} \quad E.M.\{\underline{W}_K\} = \underline{0}$$

$$E.M.\{\underline{V}_K \underline{V}_J^T\} = R_K \delta_{KJ} ; E.M.\{\underline{W}_K \underline{W}_J^T\} = Q_K \delta_{KJ} ; E.M.\{\underline{V}_K \underline{W}_J^T\} = 0$$

δ_{KJ} est le symbole de KRONECKER :

$$\delta_{KJ} = \begin{cases} 1 & : K = J \\ 0 & \forall K \neq J \end{cases}$$

On désire déduire des mesures du système :

-a- $\hat{\underline{X}}_{K/K}$: estimation de l'état à l'instant K basée sur la mesure à l'instant K et l'estimation à l'instant $K-1$

-b- $\hat{\underline{x}}_{K/K-1}$: prédiction de l'état à l'instant K basée sur l'estimation à l'instant K-1.

KALMAN définit les matrices de covariance :

$$P_{K/K-1} = E.M. \{ (\underline{x}_K - \hat{\underline{x}}_{K/K-1}) (\underline{x}_K - \hat{\underline{x}}_{K/K-1})' \}$$

$$P_{K/K} = E.M. \{ (\underline{x}_K - \hat{\underline{x}}_{K/K}) (\underline{x}_K - \hat{\underline{x}}_{K/K})' \}$$

et propose l'algorithme suivant :

-a- prédiction

$$(8-2) \quad \begin{cases} \hat{\underline{x}}_{K/K-1} = A_{K-1} \hat{\underline{x}}_{K-1/K-1} + B_{K-1} u_{K-1} \\ P_{K/K-1} = A_{K-1} P_{K-1/K-1} A_{K-1}' + Q_{K-1} \end{cases}$$

-b- estimation

$$(8-3) \quad \begin{cases} \hat{\underline{x}}_{K/K} = \hat{\underline{x}}_{K/K-1} + K_K (y_K - C_K \hat{\underline{x}}_{K/K-1}) \\ P_{K/K} = P_{K/K-1} - K_K C_K P_{K/K-1} \\ K_K = P_{K/K-1} C_K' (C_K P_{K/K-1} C_K' + R_K)^{-1} = P_{K/K} C_K' R_K^{-1} \end{cases}$$

Ces formules peuvent être symbolisées par le système asservi de la figure 8-2.

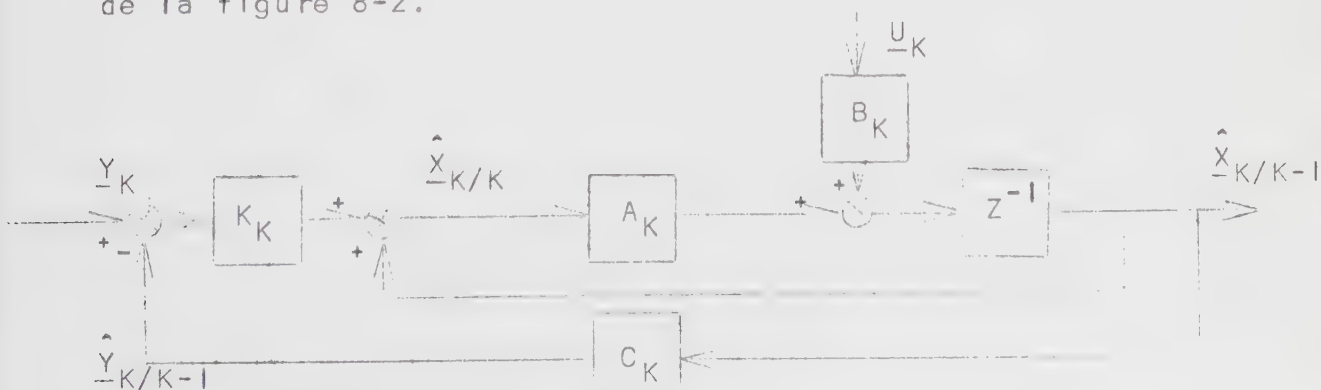


Figure 8-2

$$\hat{y}_{K/K-1} = C_K \hat{\underline{x}}_{K/K-1}$$

$\hat{y}_{K/K-1}$ est la sortie prédite à partir des variables d'état prédites.

L'initialisation de l'algorithme pose peu de problèmes : un mauvais choix du vecteur d'état initial $\hat{x}_0$ est rapidement compensé puisque la formule d'estimation (8-3) exploite l'écart entre la sortie prédite et les mesures pour corriger l'estimation ; par contre aucune mesure n'intervient dans le calcul itératif de la matrice de covariance $P_{K/K}$; cependant on démontre (26-p.242) que l'écart ΔP_K entre deux estimations obtenues avec des conditions initiales différentes décroît exponentiellement.

KALMAN a démontré que l'algorithme d'estimation qu'il propose minimise la trace de $P_{K/K}$. Ce résultat est particulièrement intéressant. En effet :

$$\text{tr} \{ P_{K/K} \} = \sum_{i=1}^m (P_{K/K})_{i,i}$$

représente la somme des variances de l'estimateur. Minimiser cette somme revient à obtenir l'estimateur à variance minimale donc *l'estimateur optimal*. Si de plus les lois de probabilité des mesures et de l'état sont gaussiennes, la valeur estimée $\hat{x}_{K/K}$ maximise la probabilité a posteriori $p[x_K/y_1, \dots, y_K]$

8-11-2. Application à l'identification

Le modèle que nous avons choisi est :

$$y(K) = [-y(K-1) \dots -y(K-n) \ u(K) \dots u(K-p)] \underline{\theta} + e(K)$$

On peut exprimer ce modèle sous la forme suivante, où l'on considère le vecteur $\underline{\theta}$ comme un vecteur de variables d'état, de $m (= n+p+1)$ composantes, invariant dans le temps :

$$\underline{\theta}_{K+1} = \underline{\theta}_K$$

$$y(K) = x(K) \underline{\theta}_K + e(K)$$

On peut appliquer le filtre de KALMAN pour estimer le vecteur d'état $\underline{\theta}_K$: il suffit de reprendre les équations (8-2) et (8-3) avec :

$$A_K = I \quad ; \quad C_K = x(K) \quad ; \quad B_K = 0 \quad ; \quad Q_K = 0$$

La prédiction est identique à l'estimation à l'état précédent puisque les paramètres sont constants :

$$\hat{\underline{\theta}}_{K/K-1} = \hat{\underline{\theta}}_{K-1/K-1} = \hat{\underline{\theta}}_{K-1}$$

$$P_{K/K-1} = P_{K-1/K-1} = P_{K-1}$$

et l'on a :

$$(8-4) \quad \begin{cases} \hat{\underline{\theta}}_K = \hat{\underline{\theta}}_{K-1} + \underline{K}_K (y(K) - x(K) \hat{\underline{\theta}}_{K-1}) \\ \underline{K}_K = P_{K-1} x'(K) \{x(K) P_{K-1} x'(K) + R_K\}^{-1} \\ P_K = P_{K-1} - \underline{K}_K x(K) P_{K-1} \end{cases}$$

Dans le cas monovariable qui nous intéresse :

$$R_K = E.M. \{e(K) \cdot e(K)\} = \sigma^2$$

et $\{R_K + x(K) P_{K-1} x'(K)\}$ est un scalaire.

Rappelons que pour appliquer cet algorithme il faut supposer que $e(K)$ est blanc.

Comparons les formules (8-4) et (8-1). Elles sont identiques. Ceci est logique puisque le filtre de KALMAN détermine l'estimateur à variance minimale ; c'est aussi le cas des moindres carrés quand le résidu est blanc (cf. 3-11-1).

8-11-3. Distance de structure

Rappelons que la définition de cette distance est (cf. 1-1-2), si

$$\underline{\Delta\theta} = \hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}$$

différence entre l'estimateur et les vrais paramètres,

$$D = f(\underline{\Delta\theta}) = \underline{\Delta\theta}' A \underline{\Delta\theta}$$

où A est une matrice de pondération.

Un algorithme a été proposé par J. RICHALET et B. GIMONET (27) pour minimiser cette distance (étude d'un système non bruité). Cet algorithme s'exprime de la façon suivante :

$$\underline{\Delta\theta}_{K+1} = (I - A^{-1} x'(K+1) \{x(K+1) A^{-1} x'(K+1)\}^{-1} x(K+1)) \underline{\Delta\theta}_K$$

on peut donc le mettre sous la forme :

(8-5)

$$\underline{\hat{\theta}}_{K+1} = \underline{\hat{\theta}}_K + A^{-1} x'(K+1) \{x(K+1) A^{-1} x'(K+1)\}^{-1} (y(K+1) - x(K+1) \underline{\hat{\theta}}_K)$$

On voit que cet algorithme corrige l'estimateur en fonction de l'erreur de prédiction du modèle. On ne peut qu'être frappé par sa ressemblance avec l'algorithme des moindres carrés (8-1) dans lequel on aurait annulé σ^2 , terme relatif au bruit. Dans le cas du filtre de KALMAN, la distance de structure choisie est la trace de la matrice de covariance de l'estimateur. Dans l'algorithme (8-5), c'est la différence pondérée entre les paramètres du modèle et du procédé. Notons que la matrice A de pondération joue le même rôle que la matrice P mais qu'elle est constante pendant toute la durée de l'identification.

8-11-4. Cas de bruit corrélé

Les algorithmes (8-1) et (8-4) sont valables si $e(K)$ est blanc. Comment tenir compte de sa corrélation ? Il existe une solution classique dans le cas du filtre de KALMAN. On prend pour modèle des résidus un filtre autorégressif.

$$e(K) + \sum_{i=1}^q f_i e(K-i) = \varepsilon(K)$$

où $\varepsilon(K)$ est un bruit blanc. (Remarquons que c'est le modèle utilisé par CLARKE). Mis sous forme de modèle d'état, il devient :

$$\underline{E}_K = \begin{bmatrix} e(K-q+1) \\ \vdots \\ e(K) \end{bmatrix}$$

$$\underline{E}_{K+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -f_q & -f_{q-1} & \dots & -f_1 & 1 \end{bmatrix} \underline{E}_K + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon(K+1) \end{bmatrix}$$

On traite alors le problème en considérant le système généralisé :

$$\underline{Z}_K = \begin{bmatrix} \underline{x}_K \\ \underline{E}_K \end{bmatrix}$$

Si l'on applique cette méthode à l'identification, le système généralisé est :

$$\underline{Z}_{K+1} = \begin{bmatrix} \underline{\theta}_{K+1} \\ \underline{E}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ -f_q & \dots & -f_1 & \dots & -f_1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \underline{Z}_K + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon(K+1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_K = \begin{bmatrix} x(K) & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \underline{Z}_K$$

soit :

$$\underline{Z}_{K+1} = A \underline{Z}_K + \underline{w}_K$$

$$\underline{y}_K = C_K \underline{Z}_K$$

$$Q_K = E.M. \{ \underline{w}_K \quad \underline{w}_K' \} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

Quand on applique les algorithmes (8-2) et (8-3) à ce cas particulier, on obtient :

$$(8-6) \quad \begin{cases} \hat{\underline{\theta}}_{K/K-1} = A \cdot \hat{\underline{\theta}}_{K-1/K-1} \\ P_{K/K-1} = A \cdot P_{K-1/K-1} A' + Q \\ \hat{\underline{\theta}}_{K/K} = \hat{\underline{\theta}}_{K/K-1} + K_K (y(K) - C_K \hat{\underline{\theta}}_{K/K-1}) \\ P_{K/K} = P_{K/K-1} - K_K C_K P_{K/K-1} \\ K_K = P_{K/K-1} C_K' (C_K P_{K/K-1} C_K')^{-1} \end{cases}$$

L'étude de cette méthode est détaillée dans (6)

La solution (8-6) est beaucoup plus lourde que la solution (8-4) ; la matrice Q n'est plus nulle et la matrice A différente de I ; l'ordre du système est augmenté q . A chaque pas d'itération, il faut donc effectuer plus de calculs, ce qui est gênant dans le cas d'une identification en temps réel.

Nous pensons personnellement qu'il vaut mieux procéder comme CLARKE et filtrer les données au fur et à mesure qu'elles arrivent, cette solution étant plus facile à mettre en oeuvre.

Pour utiliser cette technique, il faut connaître les paramètres f_j du modèle du générateur de bruit. On peut utiliser la solution proposée par CLARKE (3-8). Mais il faudrait alors emmagasiner un certain nombre de données, estimer les résidus et ensuite le filtre. Ceci demande de la place en mémoire. De plus, nous avons montré que dans le cas du modèle utilisé, le filtre $F(Z^{-1})$ dépend du polynôme $A(Z^{-1})$ (3-11-3). Donc le filtre doit évoluer en même temps que les paramètres du système. Or, il est possible de l'estimer en temps réel, puisqu'il est calculé par une méthode des moindres carrés.

Nous n'avons pas programmé cette méthode, dont la mise au point et l'étude constitue une partie du travail de recherche de M. AKLE, de la Société Télémécanique Electrique (Grenoble), qui présentera sous peu ses résultats dans une thèse de docteur-ingénieur.

8-III. LA MATRICE INSTRUMENTALE EN TEMPS REEL

Nous avons pu constater combien le calcul de l'estimateur de la matrice instrumentale (chapitre 4) :

$$\hat{\underline{\theta}} = (\underline{Z}'\underline{X})^{-1} \underline{Z}' \underline{Y}$$

et des moindres carrés (chapitre 3) :

$$\hat{\underline{\theta}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1} \underline{X}' \underline{Y}$$

se ressemblaient.

L'adaptation de la méthode de la matrice instrumentale en temps réel est exactement calquée sur le paragraphe 8-1. Nous ne détaillerons donc pas les calculs (cf. 18 - pp. 30-34). L'algorithme final est :

$$(8-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\underline{\theta}}_{N+1} = \hat{\underline{\theta}}_N + \underline{K}_{N+1} (y(N+1) - x(N+1) \hat{\underline{\theta}}_N) \\ \underline{K}_{N+1} = \underline{P}_N \underline{z}'(N+1) \{1 + x(N+1) \underline{P}_N \underline{z}'(N+1)\}^{-1} \\ \underline{P}_{N+1} = \underline{P}_N - \underline{K}_{N+1} x(N+1) \underline{P}_N \end{array} \right.$$

La correction est ici aussi basée sur l'erreur de prédiction du modèle.

Si :

$$x(N+1) = [-y(N) \dots -y(N-n+1) u(N+1) \dots u(N+1-p)]$$

on a :

$$z(N+1) = [-y(N-q) \dots -y(N-n-q+1) u(N+1) \dots u(N+1-p)]$$

où q doit être choisi pour assurer la non-corrélation de $z(N+1)$ avec $e(N+1)$ - (cf. 4-1-4)

La matrice P_N représente ici la quantité $(Z_N' X_N)^{-1}$.
Une bonne initialisation est assurée par :

$\underline{\theta}_0$ quelconque

$$P_0 = \frac{1}{\epsilon} \quad \epsilon \rightarrow 0$$

Cette méthode présente un énorme avantage pour le temps réel : elle ne nécessite pas l'hypothèse (qui n'est jamais vérifiée) de résidu blanc pour assurer la convergence de l'estimateur vers les vrais paramètres. Il n'y a pas, comme pour les moindres carrés généralisés, à estimer le filtre et filtrer les données, donc il y a économie de place et de temps calcul. La méthode de la matrice instrumentale est donc parfaitement adaptée à l'identification en temps réel.

8-IV. ETUDE DES RESIDUS EN TEMPS REEL

Les données ne sont pas emmagasinées. Il est donc indispensable si l'on veut estimer la variance des résidus de trouver une formule récurrente. La variance des résidus est estimée, en temps différé, de la façon suivante :

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{M-m} \underline{\hat{E}}_N' \underline{\hat{E}}_N$$

$m = n+p+1$, M : nombre d'équations écrites avec N mesures.

$\underline{\hat{E}}_N$ est l'estimation des résidus :

$$\underline{\hat{E}}_N = \underline{Y}_N - X_N \hat{\underline{\theta}}_N$$

$$\hat{\sigma}_{N+1}^2 = \frac{1}{M+1-m} (\underline{Y}_{N+1} - X_{N+1} \hat{\underline{\theta}}_{N+1})' (\underline{Y}_{N+1} - X_{N+1} \hat{\underline{\theta}}_{N+1})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{M+1-m} \left[\underline{Y}_{N+1}' \underline{Y}_{N+1} - 2 \underline{Y}_{N+1}' X_{N+1} \hat{\underline{\theta}}_{N+1} + \right. \\ \left. \hat{\underline{\theta}}_{N+1}' X_{N+1}' X_{N+1} \hat{\underline{\theta}}_{N+1} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{M+1-m} \left[\underline{Y}_N^T \underline{Y}_N + y^2(N+1) - 2(\underline{Y}_N^T \underline{X}_N + y(N+1)x(N+1))\hat{\underline{\theta}}_{N+1} \right. \\ \left. + \hat{\underline{\theta}}_{N+1}^T (\underline{X}_N^T \underline{X}_N + x^T(N+1)x(N+1)) \hat{\underline{\theta}}_{N+1} \right]$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{N+1}^2 = \frac{1}{M+1-m} \left[\alpha_{N+1} - 2 \beta_{N+1} \hat{\underline{\theta}}_{N+1} + \hat{\underline{\theta}}_{N+1}^T \Gamma_{N+1} \hat{\underline{\theta}}_{N+1} \right]$$

avec :

$$\alpha_{N+1} = \alpha_N + y^2(N+1)$$

$$\beta_{N+1} = \beta_N + y(N+1) x(N+1)$$

$$\Gamma_{N+1} = \Gamma_N + x^T(N+1) x(N+1)$$

et :

$$\alpha_0 = 0 \quad \beta_0 = 0 \quad \Gamma_0 = 0$$

8-V. RESULTATS PRATIQUES

8-V-1. Considérations numériques

Ce paragraphe est basé sur une remarque de JASWINSKI (27-p. 270) qui étudie le filtre de KALMAN, dont l'algorithme se réduit, quand on l'applique à l'identification, à l'algorithme (8-4), qui est aussi l'algorithme des moindres carrés. La matrice de corrélation des paramètres :

$$(8-8) \quad P_K = (I - K_K x(K)) P_{K-1}$$

peut aussi se mettre sous la forme :

$$(8-9) \quad P_K = (I - K_K x(K)) P_{K-1} (I - K_K x(K))^T + \sigma^2 K_K K_K^T$$

Première remarque : la matrice P_K est une matrice symétrique par définition. Cette propriété est assurée si l'on utilise la formule (8-9) (et si P_0 est symétrique), ce qui n'est pas le cas si l'on utilise la formule (8-8). En effet, dans la formule (8-9) P_K est calculée comme la somme de deux matrices

symétriques par construction, alors que dans la formule (8-8), les erreurs numériques peuvent faire aboutir à un résultat non symétrique.

D'autre part, JASWINSKI démontre qu'une erreur numérique sur le gain K_K n'influence pas le calcul de P_K par la formule (8-9).

L'algorithme (8-7) présente une grande ressemblance avec l'algorithme de KALMAN. Nous avons donc cherché une forme de calcul de P_K plus intéressante que celle proposée dans (18), en calquant nos calculs sur ceux de JASWINSKI. La formule proposée dans (18) est :

$$(8-10) \quad P_K = P_{K-1} - K_K x(K) P_{K-1}$$

et celle que nous proposons :

$$(8-11) \quad P_K = (1 - K_K x(K)) P_{K-1} (1 - K_K z(K))^T + K_K K_K^T$$

Vérifions tout d'abord que cette formule est correcte.

D'après (8-7) :

$$\begin{aligned} K_K &= P_{K-1} z'(K) \{1 + x(K) P_{K-1} z'(K)\}^{-1} \\ \Rightarrow K_K \{1 + x(K) P_{K-1} z'(K)\} &= P_{K-1} z'(K) \end{aligned} \quad (8-13)$$

D'après (8-11) :

$$\begin{aligned} P_K &= P_{K-1} - K_K x(K) P_{K-1} - P_{K-1} z'(K) K_K^T + K_K x(K) P_{K-1} z'(K) K_K^T \\ &\quad + K_K K_K^T \\ &= P_{K-1} - K_K x(K) P_{K-1} + (-P_{K-1} z'(K) + K_K x(K) P_{K-1} z'(K) + K_K) K_K^T \end{aligned}$$

$$(8-13) \Rightarrow P_K = P_{K-1} - K_K x(K) P_{K-1}$$

Donc (8-10) et (8-11) sont équivalents.

Considérons maintenant l'influence sur le calcul de P_K par les deux formules, d'une erreur numérique δK_K sur le gain.

D'après (8-10) :

$$\delta P_{K,1} = -\delta K_K x(K) P_{K-1}$$

D'après (8-11) :

$$\begin{aligned} \delta P_{K,2} = & -\delta K_K x(K) P_{K-1} - P_{K-1} z'(K) \delta K'_K + \delta K_K x(K) P_{K-1} z'(K) K'_K \\ & + K_K x(K) P_{K-1} z'(K) \delta K'_K + \delta K_K K'_K + K_K \delta K'_K \end{aligned}$$

en négligeant les termes du second ordre :

$$\begin{aligned} \delta P_{K,2} = & \delta K_K (-x(K) P_{K-1} + x(K) P_{K-1} z'(K) K'_K + K'_K) \\ & + (-P_{K-1} z'(K) + K_K x(K) P_{K-1} z'(K) + K_K) \delta K'_K \end{aligned}$$

D'après (8-13), le second terme à droite du signe = est nul.

Donc :

$$\begin{aligned} \delta P_{K,2} &= \delta K_K (-x(K) P_{K-1} + x(K) P_{K-1} z'(K) K'_K + K'_K) \\ &= \delta K_K (-x(K) P_{K-1} + z(K) P'_{K-1}) \\ &= \delta P_{K,1} + \delta K_K z(K) P'_{K-1} \end{aligned}$$

Dans la méthode des moindres carrés, le vecteur $z(K)$ est identique au vecteur $x(K)$, et la matrice P_K symétrique, ce qui implique que $\delta P_{K,2}$ est nul. Malheureusement, pour la méthode de la matrice Instrumentale, on ne peut conclure dans le cas général.

8-V-2. Résultats expérimentaux

Nous avons simulé une identification en temps réel par la méthode de la matrice Instrumentale et par la méthode des moindres carrés. En effet, bien que théoriquement la méthode des moindres carrés donne un estimateur biaisé, nous avons pu voir (tableau 3-3-c) que dans le cas de bruit très faible, le filtrage n'apporte aucune amélioration. Il se peut donc qu'on soit amené à utiliser cette méthode si une étude en

temps différé préalable a pu montrer que l'estimateur des moindres carrés est aussi bon que l'estimateur des moindres carrés généralisés. C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de comparer les performances des deux méthodes.

Le système que nous avons simulé est du type 3-10.

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) - 1,5 y(t-1) + 0,7 y(t-2) = u(t-1) + 0,5 u(t-2) + e(t) \\ e(t) = \xi(t) \end{array} \right.$$

$\xi(t)$ bruit blanc, gaussien, centré, d'écart-type 0,9.

L'identification a été menée sur 200 points, l'entrée utilisée était une séquence binaire de niveau ± 1 .

La courbe (8-1) montre les résultats obtenus par la méthode des moindres carrés et la courbe (8-2) ceux obtenus par la méthode de la matrice instrumentale.

On notera que les paramètres sont moins oscillants au début de l'identification par moindres carrés. Les paramètres se stabilisent à peu près dans le même temps pour les deux méthodes : leur vitesse de convergence est comparable (les paramètres sont à peu près stables au bout de 20 périodes d'échantillonnage, ce qui correspond à environ trois fois la constante de temps du système).

Les résultats obtenus avec 200 données par les deux méthodes sont reportés tableau 8-1

θ	θ_{MC}	θ_{MI}
-1,5	-1,51	-1,54
0,7	0,70	0,72
0	0,08	0,06
1	0,99	0,98
0,5	0,56	0,52

Tableau 8-1

On pourra comparer ce tableau avec le tableau 6-2, qui présente les résultats obtenus sur le même système par un calcul en temps différé : on voit que les valeurs estimées sont pratiquement identiques. On pourrait évidemment utiliser les algorithmes de calcul en temps réel pour faire une estimation en temps différé. Il faut cependant souligner que le calcul en temps réel nécessite plus d'opérations et donc est moins économique.

L'algorithme de calcul de la matrice P_K de la matrice instrumentale qui nous a permis d'obtenir les résultats de la courbe (8-2) est l'algorithme (8-11). Avec l'algorithme (8-10) nous avons observé dans ce cas particulier une divergence des paramètres à la 133^{ième} itération. La courbe (8-3) montre ce qui s'est passé sur le paramètre $b_0 (=0)$; le même phénomène a pu être observé sur les autres paramètres. Nous décrivons ci-dessous ce qui s'est passé sur le paramètre a_1 et le terme p_{11} de la matrice P .

Itération 109 :	$\hat{a}_1 = -1,626$	$p_{11} = 0,000$
" 110 :	$\hat{a}_1 = -1,635$	$p_{11} = -0,000$

à partir de cet instant, $\hat{a}_1$ commence à diverger légèrement :

Itération 121 :	$\hat{a}_1 = -1,66$	$p_{11} = -0,001$
" 131 :	$\hat{a}_1 = -2,14$	$p_{11} = -0,007$
" 132 :	$\hat{a}_1 = -2,72$	$p_{11} = -0,015$
" 133 :	$\hat{a}_1 = +6,98$	$p_{11} = 0,122$

Le paramètre prend ici une valeur complètement aberrante. L'erreur d'estimation devient alors énorme ; par suite, il y a aussitôt correction, les éléments diagonaux de P redeviennent positifs, et les paramètres se remettent à converger vers leur vraie valeur :

Itération 134 :	$\hat{a}_1 = 0,64$	$p_{11} = 0,033$
" 140 :	$\hat{a}_1 = -1,17$	$p_{11} = 0,007$

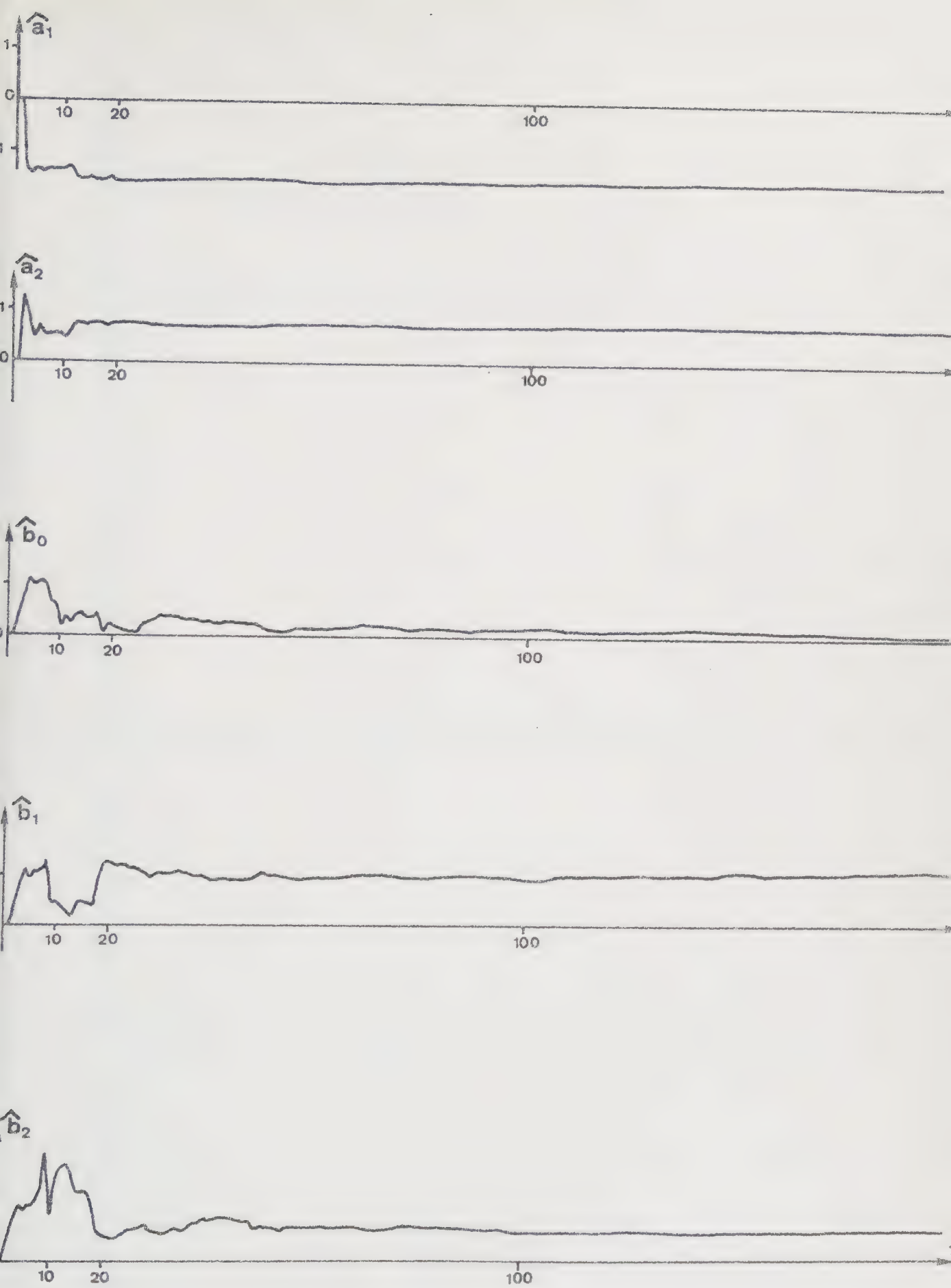
Cet exemple nous permet de mettre en évidence à quel point l'identification en temps réel est délicate. Imaginons qu'un

tel phénomène se produise sur un procédé, sur lequel on ait mis en oeuvre à la fois l'identification et la commande en temps réel : on aurait pu aboutir à un fonctionnement déplorable et peut être même dangereux pour l'unité. Nous concluons en disant que si l'identification en temps réel couplée à la commande est une technique très séduisante, elle doit être appliquée avec une grande prudence, car même si théoriquement la convergence est assurée, des problèmes numériques peuvent surgir. Ceci se produira en particulier quand une quantité devient très petite au cours du calcul, ce qui est le cas de la matrice P des algorithmes d'estimation des moindres carrés et de la matrice instrumentale (la signification physique de cette décroissance est évidente dans le cas de la méthode des moindres carrés, puisque P_N représente la précision de l'estimation à l'instant N et donc tend vers zéro quand N augmente).

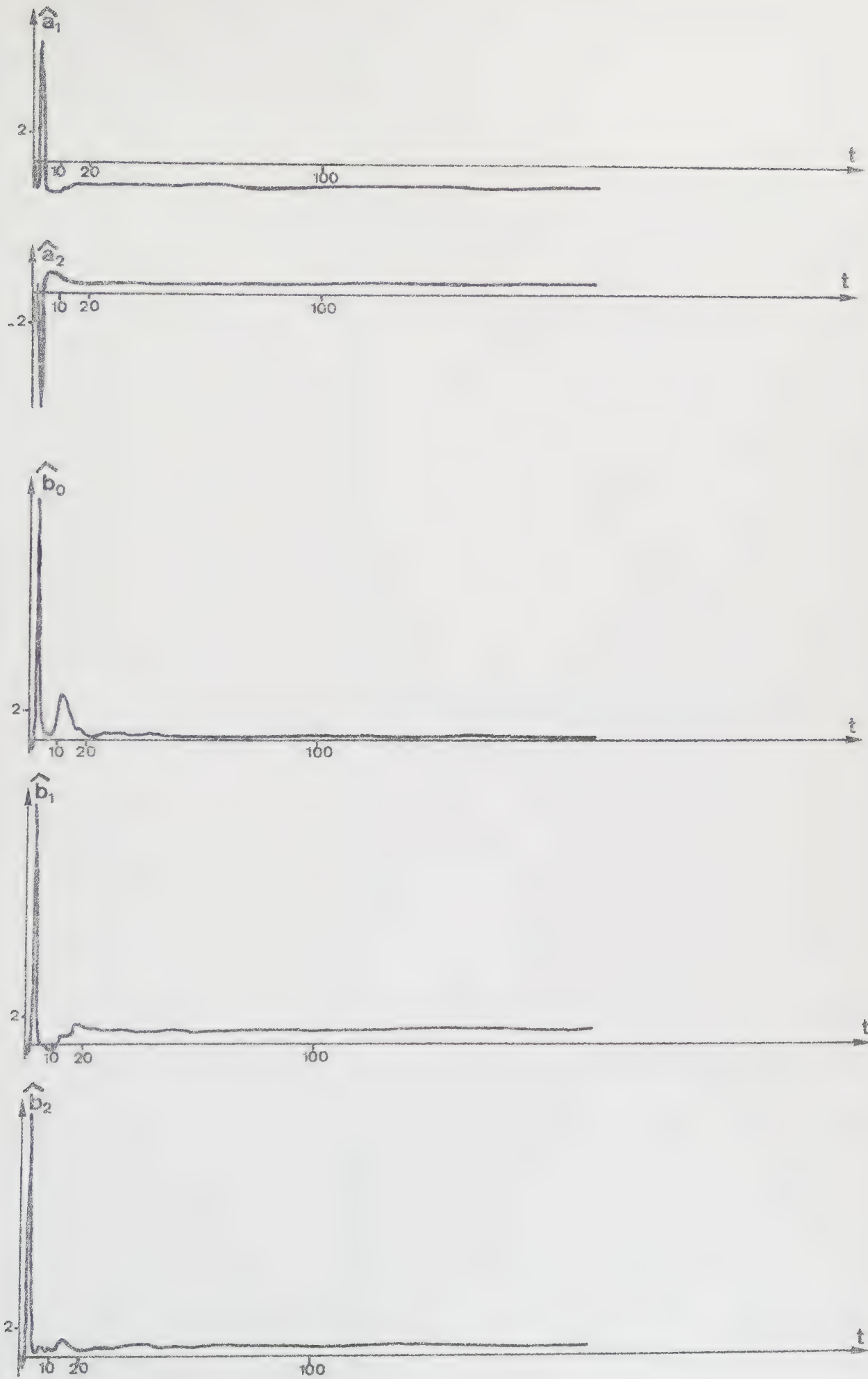
Notre étude de l'identification en temps réel a été très succincte. Elle nous a cependant permis de dégager deux thèmes.

- Il faut particulièrement soigner les algorithmes d'un point de vue numérique si l'on veut éviter bien des déboires à une installation industrielle ;
- Les calculs doivent être aussi simples que possible pour être compatibles avec les capacités d'un ordinateur industriel.

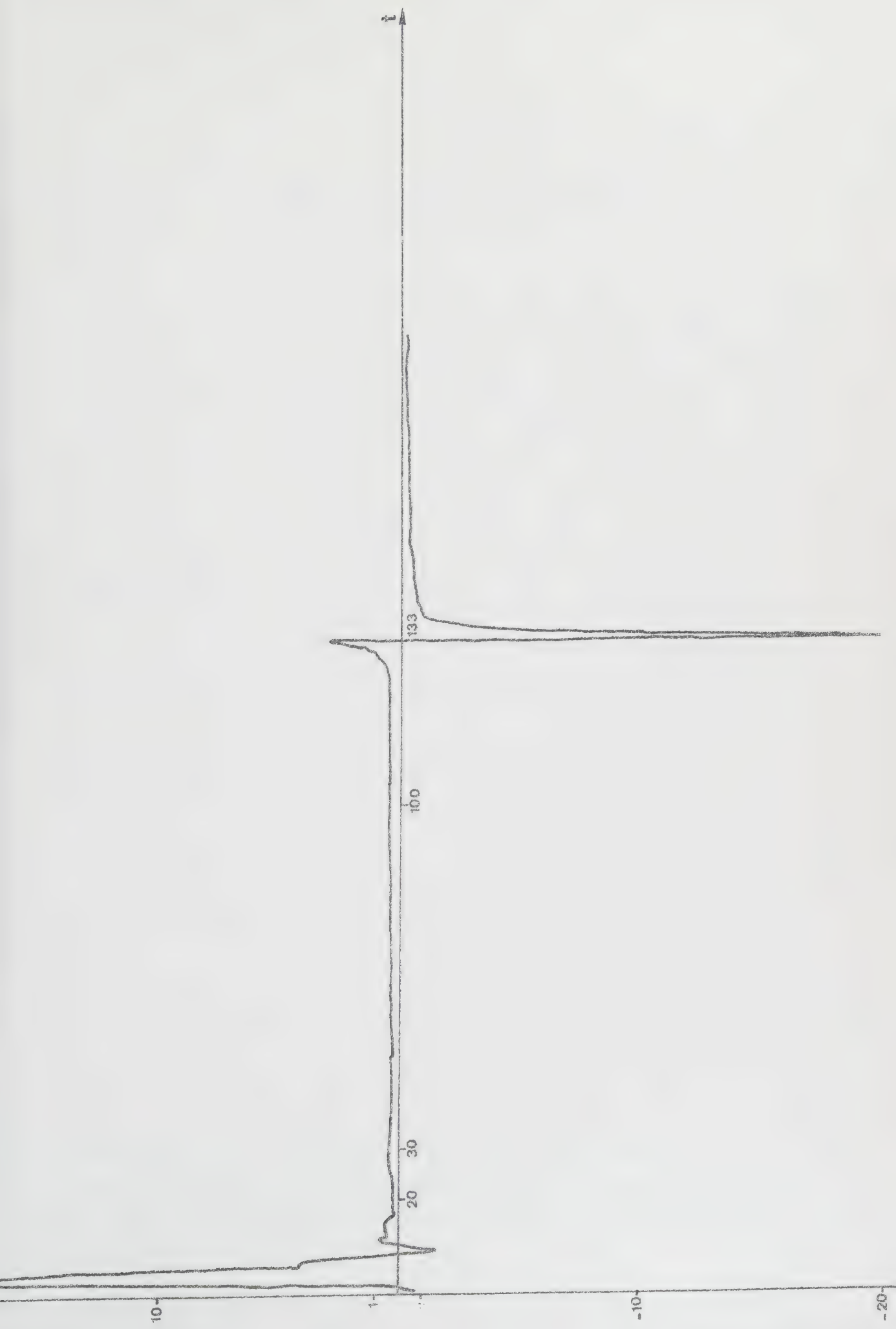
C'est pour la deuxième de ces raisons que nous n'avons pas cherché à adapter le maximum de vraisemblance en temps réel. C'est aussi pour cette raison que la méthode de la matrice instrumentale semble, parmi les méthodes que nous avons étudiées, la mieux adaptée à l'identification en temps réel, puisque c'est la plus simple et qu'elle assure, théoriquement, la convergence de l'estimateur.



Courbe 8.1: Moindres carrés en temps réel



Courbe 8.2 : Matrice instrumentale en temps réel



CHAPITRE 9

IDENTIFICATION DE PROCEDES PILOTES

Tous les résultats que nous avons présentés jusqu'ici ont été obtenus sur des systèmes simulés numériquement. Nous avons bien sûr essayé de nous placer dans les conditions les plus diverses possibles pour établir des comparaisons valables, mais on peut cependant se poser la question suivante : tous ces résultats sont-ils vérifiés dans un cas vraiment réel ? Est-ce qu'il n'intervient pas sur un procédé industriel des phénomènes dont on aurait oublié de tenir compte dans la théorie, et qui mettrait celle-ci en échec ? Ce chapitre va nous permettre de montrer que les propriétés déterminées en simulation sont encore vérifiées quand on cherche à identifier un système physique.

Nous allons présenter ci-dessous les résultats obtenus lors de l'identification d'une machine à papier pilote et d'une colonne à distiller pilote.

9-1. IDENTIFICATION D'UNE MACHINE A PAPIER

Le Centre Technique de l'Industrie des Papiers, Cartons et Celluloses de Gières (Isère) possède une machine à papier pilote dont les caractéristiques sont telles que cette machine a le même comportement dynamique qu'une unité industrielle.

La feuille obtenue sur cette machine a une largeur de 50 cm, la vitesse de sortie maximale étant de 100 m/mn. Dans l'optique des études entreprises actuellement par le C.T.I.P.C.C. ce système peut être considéré comme un système multivariable, avec deux grandeurs de commande : le débit de pâte, P , (alimentation de la machine en pâte à papier) et la position de la vanne vapeur, V , (la feuille de papier est séchée sur des cylindres chauffés à la vapeur), et deux sorties : le grammage sec, G_s , (poids de papier par unité de surface) et l'humidité, H ,

(teneur en eau de la feuille), grandeurs qui conditionnent la qualité de la production. La masse au m^2 est mesurée par l'absorption d'un rayonnement radio-actif β par la feuille et l'humidité par la valeur de la constante diélectrique d'un condensateur plan. Le grammage sec est déduit du grammage total et de l'humidité.



Schéma de principe de la machine à papier

9-1-1. Connaissances a priori

L'équipe du Service "Mathématiques Appliquées" du Centre Technique s'efforce de mettre en oeuvre les méthodes modernes de l'Automatique sur ce procédé pilote. Elle a, en particulier, identifié les réponses impulsionnelles de la machine par la méthode d'intercorrélation au moyen de séquences binaires pseudo-aléatoires (28). La recherche des fonctions de transfert du système se fait à partir des réponses impulsionnelles par programmation non linéaire (la distance choisie est la somme des carrés des écarts entre la réponse impulsionnelle expérimentale et celle du modèle).

Nous avons personnellement cherché à identifier le transfert humidité/débit de pâte, autour du point de fonctionnement 5 % et 6 m^3/h . L'entrée utilisée était une séquence binaire pseudo-aléatoire de niveau $\pm 0,25 m^3/h$, de longueur $L = 127$, de période 5 s (égale à la période d'échantillonnage). L'allure d'une séquence identique mais normalisée (niveau ± 1) est représentée sur la courbe 9-1.

A partir de la réponse impulsionnelle obtenue par intercorrélation, nos camarades du Centre Technique ont déterminé par programmation non linéaire le modèle continu suivant :

$$F(p) = \frac{1}{(1 + \tau p)^2}$$

donc une constante de temps double, avec :

$$\tau = 27 \text{ s.}$$

Le gain déterminé par ailleurs est de 8,7.

Le système comporte un retard pur qui a été pris égal à 60 s., soit 12 périodes d'échantillonnage. La courbe 9-2 montre la réponse impulsionnelle de ce modèle et celle obtenue par intercorrélation. Le modèle échantillonné qui correspond à ce modèle continu est :

$$F(z) = \frac{0,130 z^{-1} + 0,115 z^{-2}}{1 - 1,662 z^{-1} + 0,690 z^{-2}}$$

On constate que c'est l'entrée à l'instant $(t-13)$ qui intervient sur la sortie à l'instant t .

Pour identifier ce système avec les trois méthodes étudiées, nous avons nous aussi choisi le retard R égal à 13 périodes d'échantillonnage. Rappelons que le modèle est de la forme :

$$y(t) + \sum_{i=1}^R a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^P b_i u(t-i-R)$$

Nous avons, pour chacune des méthodes, donné diverses valeurs à n et p afin de trouver la meilleure structure à donner au modèle. Compte tenu de l'allure de la réponse impulsionnelle et du modèle déterminé au Centre Technique du Papier, nous avons commencé notre recherche par une structure du second ordre ($n=2$). Nous avons utilisé 200 couples de données entrée-sortie (environ une fois et demie la longueur de la séquence d'entrée).

9-1-2. Modèle du maximum de vraisemblance

Nous donnons tableau 9-1 les divers modèles du second ordre obtenus par cette méthode quand p varie de 0 à 2. Nous ne donnons pas les paramètres c_i dont on sait que le nombre et les valeurs influencent peu les résultats.

	θ_{MV1}	θ_{MV2}	θ_{MV3}	θ_{MV4}
a_1	$-1,61 \pm 0,07$	$-1,66 \pm 0,04$	$-1,76 \pm 0,03$	$-1,69 \pm 0,06$
a_2	$0,65 \pm 0,06$	$0,69 \pm 0,04$	$0,79 \pm 0,03$	$0,72 \pm 0,05$
b_0	$0,18 \pm 0,02$	$0,18 \pm 0,02$	$0,23 \pm 0,02$	-
b_1	$0,14 \pm 0,03$	$0,13 \pm 0,03$	-	$0,20 \pm 0,03$
b_2	$0,03 \pm 0,04$	-	-	-
C	1,23	1,24	1,40	1,55
σ_ξ	0,079	0,079	0,083	0,088

Tableau 9-1

Rappelons (cf. 5-11-2) que le critère que nous calculons est :

$$C = \sum_{t=1}^N \xi^2(t)$$

où $\xi(t)$ est un bruit blanc dont l'écart-type estimé est σ_ξ .

Le modèle le plus complexe que l'on peut déterminer est θ_{MV1} . La valeur du paramètre b_2 ($0,03 \pm 0,04$) indique que ce paramètre est vraisemblablement nul. Nous avons donc recherché le modèle θ_{MV2} qui ne comporte plus que b_0 et b_1 . On constate que ce modèle est plus précis et que le critère $C_{MV2}(1,24)$ est presque identique au critère $C_{MV1}(1,23)$. Il n'y a donc aucun doute possible : le modèle θ_{MV2} est meilleur que le modèle θ_{MV1} .

Nous avons cherché les modèles θ_{MV3} et θ_{MV4} qui ne comportent plus qu'un paramètre b_1 (modèle le plus simple possible). On constate, dans les deux cas, une augmentation du critère. Dans le cas de θ_{MV4} , l'écart-type des paramètres a lui aussi augmenté. Donc ce modèle est moins bon que θ_{MV2} . Par contre dans le cas de θ_{MV3} , l'écart-type des paramètres est plus faible que dans le cas de θ_{MV2} . Or nous avons constaté au cours de nos simulations (cf 7-11-2 par exemple) que pour la détermination du nombre de paramètres b_i à affecter au modèle, la mesure

de l'écart-type des paramètres était meilleure que celle du critère (qui a tendance à augmenter quand p diminue). Remarquons encore d'autre part que le gain du modèle θ_{MV2} , G_{MV2} est 9,3 alors que G_{MV3} est 8,7, donc identique au gain déterminé expérimentalement sur le système (qui est 8,7).

Pour toutes ces raisons, nous préférons θ_{MV3} à θ_{MV2} . Soulignons cependant que si en première analyse θ_{MV3} nous semble meilleur que θ_{MV2} , tout en présentant l'avantage d'une plus grande simplicité, il pourrait se révéler moins bon à l'usage. Il faudrait en fait pour décider lequel de ces deux modèles est le meilleur, comparer leurs performances vis-à-vis de la commande.

Nous avons vérifié qu'il était inutile de déterminer un modèle du troisième ordre ; voici les paramètres que nous avons déterminés avec $n = 3$.

$$\begin{array}{lll} a_1 & : & -1,65 \pm 0,5 \quad b_0 & : & 0,18 \pm 0,02 \quad C & : & 1,22 \\ a_2 & : & 0,75 \pm 0,8 \quad b_1 & : & 0,13 \pm 0,09 \\ a_3 & : & -0,07 \pm 0,3 \quad b_2 & : & 0,04 \pm 0,08 \\ & & & b_3 & : & 0,02 \pm 0,06 \end{array}$$

On constate sur ce modèle que si le critère n'a pas diminué par rapport à ceux obtenus avec des modèles du second ordre, l'écart-type des paramètres a beaucoup augmenté. D'autre part, la valeur du coefficient a_3 ($-0,07 \pm 0,30$) indique clairement que ce paramètre est nul. Nous retiendrons donc le modèle suivant :

$$y(t) - 1,76 y(t-1) + 0,79 y(t-2) = 0,23 u(t-13)$$

modèle qui permet la meilleure précision tout en utilisant le nombre minimal de paramètres. Signalons qu'alors le polynôme $C(Z^{-1})$ déterminé est :

$$C(Z^{-1}) = 1 - 0,61Z^{-1} - 0,17Z^{-2}$$

9-1-3. Modèle de la matrice instrumentale

Le tableau 9-2 donne les résultats de l'identification de la machine à papier par cette méthode quand on fixe $n = 2$. (Après divers essais, nous avons été amenés à choisir le retard K de la matrice instrumentale égal à 2).

	θ_{M11}	θ_{M12}	θ_{M13}	θ_{M14}
a_1	- 1,36	- 1,31	- 1,22	- 1,26
a_2	0,41	0,37	0,29	0,33
b_0	0,16	0,16	0,15	-
b_1	0,18	0,19	-	0,19
b_2	0,10	-	-	-
C	1,14	1,31	1,95	1,67
σ_e	0,077	0,083	0,101	0,093

Tableau 9-2

Rappelons que le critère calculé par notre programme est basé sur l'erreur de prédiction du modèle :

$$C = \sum_{t=n+K+1}^N e^2(t)$$

où $e(t)$ est le résidu, corrélié. Nous savons que ce critère n'est pas très significatif de la qualité de l'estimation (3-III-2) ; σ_e est l'estimation de l'écart-type des résidus.

La caractérisation avec cette méthode est difficile puisqu'elle ne fournit pas l'écart-type des paramètres et que le critère que l'on peut calculer ne peut guère servir d'indication.

Il semble bien à l'examen du tableau 9-2 que le modèle θ_{M11} soit celui qu'il faut choisir, bien qu'il soit le plus

compliqué, car aucun des paramètres b_i n'est négligeable. On pourrait à la rigueur utiliser θ_{M12} . Remarquons cependant que si $G_{M11} = 8$ (assez proche de 8,7), $G_{M12} = 5,9$. Donc ce modèle risque fort de donner de mauvais résultats.

Nous avons vérifié qu'un modèle du troisième ordre n'était pas meilleur. Voici les résultats que nous avons obtenus :

a_1	: 19,2	b_0	: - 0,30	C	: 484
a_2	: - 27,4	b_1	: 3,48		
a_3	: 8,4	b_2	: 3,88		
		b_3	: 2,03		

La valeur du critère a énormément augmenté par rapport à celle obtenue avec les modèles du deuxième ordre. L'hypothèse de système du troisième ordre peut donc être abandonnée sans scrupule.

Finalement, nous retiendrons le modèle suivant :

$$y(t) - 1,36y(t-1) + 0,41y(t-2) = 0,16u(t-13) + 0,18u(t-14) + 0,10u(t-15)$$

9-1-4. Modèle des moindres carrés généralisés

Les résultats obtenus par cette méthode sur les divers modèles d'ordre 2 sont reportés dans le tableau 9-3.

	θ_{MCG1}	θ_{MCG2}	θ_{MCG3}	θ_{MCG4}
a_1	$-1,47 \pm 0,05$	$-1,56 \pm 0,04$	$-1,65 \pm 0,05$	$-1,52 \pm 0,05$
a_2	$0,52 \pm 0,05$	$0,60 \pm 0,04$	$0,69 \pm 0,05$	$0,57 \pm 0,05$
b_0	$0,16 \pm 0,02$	$0,17 \pm 0,02$	$0,18 \pm 0,03$	-
b_1	$0,17 \pm 0,02$	$0,16 \pm 0,02$	-	$0,17 \pm 0,03$
b_2	$0,07 \pm 0,03$	-	-	-
C	1,13	1,17	1,46	1,51
σ_ε	0,077	0,078	0,087	0,088

Tableau 9-3

Rappelons que le critère calculé par cette méthode est :

$$C = \sum_{t=n+1}^N \xi^2(t)$$

où $\xi(t)$ est un bruit blanc déduit des résidus par filtrage. σ_ξ est l'écart-type estimé de ce bruit.

La caractérisation est assez facile avec la méthode des moindres carrés généralisés compte tenu des valeurs relatives des critères et des écarts-type des paramètres. Le modèle le plus performant est θ_{MCG2} ; l'écart-type des paramètres est dans ce cas le plus faible, le critère n'est guère plus élevé que dans le cas du modèle le plus complexe θ_{MCG1} . Si l'on compare les gains, on trouve $G_{MCG1} = 10,8$, $G_{MCG2} = 7,6$ et $G_{MCG3} = 4,3$. Donc ce test indique aussi que θ_{MCG2} est le meilleur modèle.

Le filtre déterminé est alors très faible :

$$F(Z^{-1}) = 1 + 0,06 Z^{-1}$$

On peut d'ailleurs constater que les variances estimées par les trois méthodes sont très proches : les résidus sont donc identiques à un bruit blanc.

Nous avons recherché un modèle du troisième ordre :

a_1 :	$-1,46 \pm 0,07$	b_0 :	$0,16 \pm 0,02$	C :	$1,09$
a_2 :	$0,58 \pm 0,12$	b_1 :	$0,017 \pm 0,02$		
a_3 :	$-0,07 \pm 0,06$	b_2 :	$0,08 \pm 0,03$		
		b_3 :	$0,06 \pm 0,03$		

Le critère n'a pratiquement pas diminué par rapport à celui obtenu avec θ_{MCG1} . De plus, il est clair que le paramètre $a_3(-0,07 \pm 0,06)$ est nul. Il est donc inutile d'utiliser un modèle du troisième ordre.

Le modèle le plus intéressant obtenu par cette méthode est :

$$y(t) - 1,56y(t-1) + 0,60y(t-2) = 0,17u(t-13) + 0,16u(t-14)$$

9-1-5. Comparaison des modèles

Il est assez difficile de comparer les modèles que nous avons sélectionnés puisqu'ils ne comportent pas le même nombre de paramètres. On peut cependant constater que le modèle obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance est à la fois le plus simple et le plus précis, le plus compliqué étant celui obtenu par la méthode de la matrice instrumentale.

Pour visualiser les performances relatives de chaque modèle, nous avons superposé la réponse $y_p(t)$ du système qui a servi à l'identification à la réponse $y_M(t)$ du modèle à la même entrée. La courbe 9-3 donne les résultats du modèle du maximum de vraisemblance, la courbe 9-4 ceux du modèle de la matrice instrumentale et la courbe 9-5 ceux du modèle des moindres carrés généralisés. Nous avons calculé dans chaque cas le critère :

$$J = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y_p - y_M)^2(t)$$

qui représente l'erreur quadratique moyenne du modèle (donc une distance d'état).

Voici les critères obtenus avec les modèles que nous avons choisis :

	θ_{MV3}	θ_{MII}	θ_{MCG2}
J	0,062	0,094	0,082

Nous avons effectué le même calcul avec θ_{MV2} que nous hésitions à rejeter. Nous avons trouvé $J = 0,070$. Au sens du critère J, le modèle θ_{MV3} que nous avons choisi est meilleur que le modèle θ_{MV2} . Le même critère calculé avec θ_{MI2} vaut 0,122 donc ce modèle est nettement moins bon que θ_{MII} ; ce critère calculé avec θ_{MCG1} vaut 0,085 et avec θ_{MCG3} 0,122. Dans ce cas encore notre choix nous avait fait sélectionner le meilleur modèle, au sens de l'erreur quadratique moyenne.

Nous avons voulu achever cette étude en comparant nos modèles au modèle continu discrétisé. Rappelons que celui-ci est :

$$y(t) - 1,662y(t-1) + 0,69y(t-2) = 0,130u(t-13) + 0,115u(t-14)$$

Ce modèle a été identifié grâce à 127 données entrée-sortie, et les nôtres avec 200 données. Mais on sait, lorsqu'on calcule la réponse impulsionnelle d'un système par intercorrélation, que la meilleure précision que l'on puisse obtenir est celle que l'on a quand on utilise exactement la longueur de la séquence à l'entrée. Par contre, avec les méthodes que nous étudions, il n'y a aucune contrainte sur le nombre de données.

La simulation de la sortie de ce modèle est reportée sur la courbe 9-6. Nous avons alors obtenu une erreur quadratique moyenne $J = 0,082$.

Ce modèle est donc moins bon que le modèle du maximum de vraisemblance, de même qualité que le modèle des moindres carrés et meilleur que le modèle de la matrice instrumentale, au sens du critère J .

Constatons encore qu'il comporte le même nombre de paramètres que le modèle des moindres carrés généralisés, plus que le modèle du maximum de vraisemblance et moins que le modèle de la matrice instrumentale. Remarquons aussi dans le cas du modèle du maximum de vraisemblance qui comporte le même nombre de paramètres que le modèle du C.T.I.P.C.C., que nous obtenons exactement les mêmes coefficients a_i ($a_1 = -1,66$; $a_2 = 0,69$) mais qu'il y a une différence assez nette sur les paramètres b_i .

Soulignons que si l'on voulait passer du modèle du maximum de vraisemblance θ_{MV3} - qui est notre modèle le plus simple - à un modèle continu, ce dernier serait plus compliqué que le modèle continu identifié directement sur la réponse impulsionnelle (il comporterait des zéros). Cette remarque va dans le sens de ce que nous disions au début du chapitre 2 : il faut identifier le modèle sous la forme avec laquelle on va l'utiliser, pour éviter tous les intermédiaires possibles, qui ne peuvent que faire perdre de la précision et compliquer les résultats.

9-11. IDENTIFICATION D'UNE COLONNE A DISTILLER PILOTE

Nous avons appliqué les trois méthodes d'identification à la colonne à distiller pilote du Laboratoire d'Automatique de Grenoble. Les bacs d'alimentation de cette colonne contiennent un mélange eau-alcool méthylique. Le débit L_f et la concentration X_f de ce mélange sont considérés comme des perturbations mesurables. Les deux variables d'action sont la puissance de chauffe Q_B et le débit de reflux L_R (une partie du produit distillé est renvoyé à l'entrée de la colonne). La sortie de ce procédé est la concentration en tête X_D , mesurée par un réfractomètre. Les unités utilisées sont des % pour la concentration, des litres par heure pour les débits et des kilowatts pour la puissance de chauffe. L'unité fonctionne dans la gamme :

$$0 \leq L_R \leq 12 \text{ l/h} ; 0 \leq Q_B \leq 10 \text{ kw} ; 0 \leq L_f \leq 16 \text{ l/h}$$

et :

$$X_f = 50 \%.$$



Schéma de principe de la colonne à distiller

Nous avons identifié le transfert concentration en sortie/débit de reflux.

9-11-1. Entrée : séquence binaire pseudo-aléatoire

Nous avons envoyé sur L_R une séquence binaire pseudo-aléatoire de niveau ± 1 l/h, de longueur $L = 127$, de période 15 s autour du point statique $L_{R0} = 8$ l/h et $Q_{B0} = 6$ kw. Nos enregistrements correspondent au fonctionnement de l'unité

pendant 32 mn. La sortie X_D varie alors de $\pm 1,6 \%$ environ autour du point de fonctionnement $X_{D0} = 80 \%$. (On constate sur cet exemple pratique que le fait de superposer à l'entrée du système un signal de test très riche perturbe peu la sortie). Nous avons utilisé pour l'identification 117 données.

a) Caractérisation

Nous nous sommes servis du programme mis au point par A. MENENDEZ-MARTINEZ au Laboratoire (22) pour obtenir par intercorrélacion la réponse impulsionnelle du système (cf. courbe 9-7). L'examen de cette courbe permet de conclure que le système possède au moins deux constantes de temps et un retard pur.

Nous avons choisi pour le retard pur une valeur égale à 8 périodes d'échantillonnage pour commencer notre recherche. Pour caractériser le système, nous avons tracé les courbes donnant le critère C en fonction de l'ordre n (nous avons alors fixé le paramètre p égal à n : on sait que le nombre des paramètres b_j doit être choisi plutôt en fonction de leurs valeurs relatives et de leur précision qu'en fonction des valeurs du critère). Les résultats obtenus sont identiques pour les trois méthodes et indiquent que l'ordre idéal est $n = 3$. A titre indicatif nous donnons la courbe C(n) obtenue par la méthode des moindres carrés généralisés. (Courbe 9-8). Signalons d'autre part que dans le cas des moindres carrés généralisés et du maximum de vraisemblance, il est très facile de conclure qu'un modèle du 4ème ordre est inutile, au vu de la valeur du paramètre a_4 et de sa précision (pour les moindres carrés généralisés par exemple : $a_4 = -0,02 \pm 0,06$). Dans le cas de la matrice instrumentale, c'est une augmentation très nette du critère (il double) qui permet de conclure.

b) Résultats

Nous n'allons pas ici analyser en détail chacun des modèles obtenus par chaque méthode et expliquer pourquoi nous avons sélectionné l'un d'entre eux car en fait nous ne pourrions

que reprendre les explications données en 9-1 pour la détermination du modèle de la machine à papier analyse des paramètres, de leurs valeurs relatives, des critères, et comparaison des sorties modèle-sortie procédé.

Le tableau 9-5 donne les paramètres identifiés pour p maximum ($p=3$).

	θ_{MCGI}	θ_{MII}	θ_{MVI}
a_1	$-1,75 \pm 0,06$	$-1,94$	$-1,96 \pm 0,04$
a_2	$1,26 \pm 0,09$	$1,43$	$1,50 \pm 0,05$
a_3	$-0,47 \pm 0,04$	$-0,47$	$-0,51 \pm 0,03$
b_0	$0,034 \pm 0,005$	$0,030$	$0,030 \pm 0,005$
b_1	$0,088 \pm 0,005$	$0,080$	$0,089 \pm 0,007$
b_2	$0,062 \pm 0,008$	$0,039$	$0,032 \pm 0,009$
b_3	$0,014 \pm 0,008$	$-0,013$	$-0,016 \pm 0,09$

Tableau 9-5

Pour obtenir ces résultats nous avons retardé la matrice instrumentale de 3 périodes d'échantillonnage. On constate que les trois modèles sont proches. On constate aussi que les paramètres b_0 et b_3 sont plus faibles que b_1 et b_2 dans la plupart des cas.

Après analyse des divers modèles, nous avons donc éliminé certains paramètres b_i et sélectionné finalement les modèles du tableau 9-6.

Sur le tableau 9-6, s représente l'écart-type estimé, écart-type du bruit blanc pour θ_{MCG} et θ_{MV} et des résidus pour θ_{MI} . Le polynôme $C(Z^{-1})$ est égal à :

$$1 - 1,10 Z^{-1} + 0,50 Z^{-2} + 0,06 Z^{-3}$$

On pourrait vraisemblablement améliorer les valeurs des paramètres c_i en choisissant pour ce polynôme un ordre 2. Mais nous savons qu'alors les paramètres a_i et b_i changent peu ou pas et d'autre

part, nous n'avons aucun moyen de vérifier la qualité de l'identification de $C(Z^{-1})$.

	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
a_1	$-2,07 \pm 0,04$	$-2,02$	$-2,02 \pm 0,03$
a_2	$1,68 \pm 0,08$	$1,52$	$1,62 \pm 0,04$
a_3	$-0,59 \pm 0,04$	$-0,51$	$-0,57 \pm 0,02$
b_0	-	$0,029$	-
b_1	$0,100 \pm 0,07$	$0,077$	$0,114 \pm 0,004$
b_2	-	$0,032$	-
b_3	-	-	-
s	$0,07$	$0,08$	$0,06$

Tableau 9-6

Le filtre déterminé par les moindres carrés est :

$$\begin{aligned}
 F(Z^{-1}) &= (1 + 0,18 Z^{-1}) (1 + 0,15 Z^{-1}) (1 + 0,11 Z^{-1}) \\
 &= 1 + 0,44 Z^{-1} + 0,06 Z^{-2} + \dots
 \end{aligned}$$

La simulation de ces divers modèles est reportée :

- sur la courbe 9-9 : modèle des moindres carrés généralisés
- sur la courbe 9-10 : modèle de la matrice instrumentale
- sur la courbe 9-11 : modèle du maximum de vraisemblance.

On obtient pour erreur quadratique moyenne :

	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
J	$0,035$	$0,055$	$0,030$

On constate encore une fois que le modèle fourni par la méthode du maximum de vraisemblance est le meilleur, et que celui fourni par la matrice instrumentale est à la fois plus compliqué et moins performant.

Signalons que la simulation du modèle de la matrice instrumentale à un seul paramètre b_1 (donc aussi simple que θ_{MCG} et θ_{MV}) fournit une erreur quadratique moyenne $J = 0,09$. Le modèle que nous avons sélectionné est donc nettement plus performant.

Signalons encore que la simulation du modèle le plus compliqué obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance (θ_{MVI} - cf. tableau 9-5) fournit une erreur quadratique moyenne $J = 0,017$. Donc ce modèle est supérieur au modèle sélectionné θ_{MV} . Mais quand on sait que la mesure de la concentration X_D se fait avec une erreur absolue de l'ordre de 0,2 %, ce qui correspond à une erreur quadratique moyenne de 0,04, on conclut immédiatement que la précision obtenue avec le modèle θ_{MVI} est illusoire.

Nous donnons courbe 9-7 la superposition de la séquence de pondération du modèle du maximum de vraisemblance et celle obtenue par intercorrélation. (Celle-ci a été calculée comme expliqué en 2-11-6). On peut dire que les deux réponses, obtenues par deux voies différentes, coïncident assez bien.

9-11-2. Entrée : échelon

Nous étions en possession de la réponse de la colonne à un échelon de débit unitaire appliqué au point de fonctionnement 8 l/h, 6 kw. La période d'échantillonnage utilisée au cours de cet essai était de 30 s et nous avions à notre disposition 54 couples entrée-sortie. L'enregistrement de la sortie permet de supposer que le retard est dans ce cas de 4 ou 5 périodes d'échantillonnage.

Nous avons expliqué dans le chapitre 7 que l'échelon n'est pas l'entrée idéale si l'on veut obtenir beaucoup d'informations sur le système : elle ne permet pas d'identifier les

zéros, se prête mal à l'identification du retard et son utilisation risque de conduire à un modèle trop simplifié du système. Il peut cependant se révéler utile d'avoir un modèle très simple qui rende bien compte de la réponse indicielle du système. C'est pourquoi nous avons identifié la colonne à partir de cet enregistrement. Nous avons commencé par supposer le système du premier ordre, et les résultats obtenus ont été très bons.

a) Problème du retard

Nous allons montrer comment résoudre ce problème sur l'exemple des moindres carrés généralisés.

Quand on suppose le retard R égal à 4 périodes d'échantillonnage, on trouve l'estimateur suivant :

$$a_1 = - 0,87 \pm 0,02 \quad ; \quad b_0 = 0,74 \pm 0,08 \quad ; \quad C = 0,37$$

et quand on le suppose égal à 5 périodes d'échantillonnage :

$$a_1 = - 0,90 \pm 0,01 \quad ; \quad b_0 = 0,58 \pm 0,05 \quad ; \quad C = 0,47$$

Donc, le critère semble indiquer que R = 4 et la précision des paramètres que R = 5. Il est pratiquement impossible de se décider si l'on ne simule pas la sortie du système. Mais alors, la solution est évidente : regardez les courbes 9-12 et 9-13. La courbe 9-12 simule la sortie du modèle quand on prend R = 4 ; il est bien clair que le retard est mal identifié. La courbe 9-13 permet de conclure que le modèle suit très bien le procédé, quand R = 5.

b) Résultats

Le retard étant choisi égal à 5 périodes d'échantillonnage, nous avons trouvé les modèles portés tableau 9-7 :

	θ_{MCG}	θ_{MI}	θ_{MV}
a_1	$-0,90 \pm 0,01$	-0,90	$-0,90 \pm 0,01$
b_0	$0,58 \pm 0,05$	0,58	$0,58 \pm 0,05$

Tableau 9-7

Ils sont tout à fait identiques. Nous avons cherché à identifier un paramètre c_1 , que nous avons trouvé égal à : $0,13 \pm 0,15$. Il n'y a donc aucune précision sur l'identification du polynôme $C(Z^{-1})$. Pour trouver θ_{M1} , nous avons retardé la matrice instrumentale de 3 périodes d'échantillonnage (un retard égal à deux donnait un gain un peu fort) Il nous a fallu 2 itérations pour la méthode des moindres carrés généralisés, ce qui donne :

$$\begin{aligned} F(Z^{-1}) &= (1 - 0,12 Z^{-1}) (1 - 0,01 Z^{-1}) \\ &= 1 - 0,13 Z^{-1} + 0,01 Z^{-2} \end{aligned}$$

L'écart-type du bruit est dans chaque cas estimé à 0,1. On vérifie courbe 9-13 que le modèle se comporte bien comme le système quand on le soumet à un échelon. L'erreur quadratique moyenne est 0,016, donc très faible. Il est cependant évident que la réponse impulsionnelle d'un tel modèle ne pourrait coïncider avec celle obtenue par intercorrélation.

c) Comparaison avec les modèles obtenus à partir des séquences binaires

L'étude de la réponse à des séquences binaires nous avait conduit à assimiler la colonne à un procédé du troisième ordre. Nous avons donc recherché sur la réponse indicielle des modèles d'ordre supérieur à 1. Comme lors de nos simulations, nous avons pu constater que les méthodes des moindres carrés généralisés et de la matrice instrumentale indiquent clairement quand on fait $n = 2$ que la deuxième constante de temps est négligeable. Par contre avec la méthode du maximum de vraisemblance, on constate une diminution du critère jusqu'à l'ordre 3. On trouve alors l'estimateur :

$$\begin{aligned} a_1 &: -1,93 \pm 0,21 & b_0 &: 0,31 \pm 0,06 & s &: 0,07 \\ a_2 &: 1,53 \pm 0,31 \\ a_3 &: -0,55 \pm 0,11 \end{aligned}$$

Le polynôme $C(Z^{-1})$ identifié est :

$$C(Z^{-1}) = (1 - 0,92 Z^{-1} + 0,05 Z^{-2} + 0,25 Z^{-3})$$

Il faut remarquer que la précision du modèle est mauvaise. Ceci n'a rien d'étonnant : la détermination de trois constantes de temps uniquement sur la réponse indicielle telle qu'elle se présente est très délicate. La simulation de ce modèle fournit une erreur quadratique $J = 0,011$, donc plus faible que celle calculée avec le modèle du premier ordre (courbe 9-14). Remarquons cependant que l'amélioration obtenue est faible et que le premier ordre est bien suffisant pour décrire la réponse indicielle.

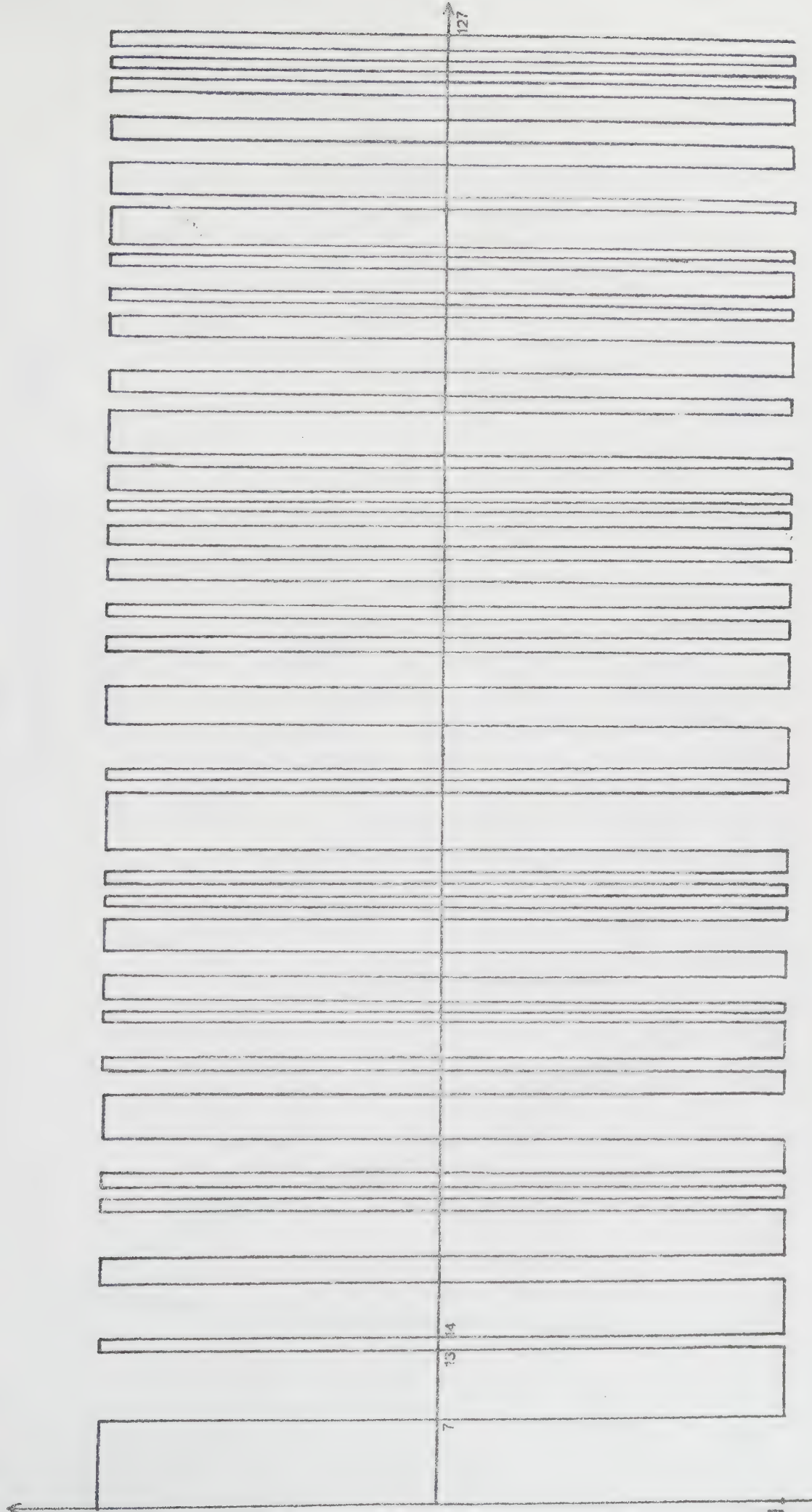
Il est difficile de comparer les deux modèles du troisième ordre obtenus par maximum de vraisemblance avec les deux entrées différentes puisque la période d'échantillonnage est différente dans les deux cas. On peut cependant remarquer que les gains statiques (facilement calculables) sont : dans le cas de la séquence binaire 3,8 et dans le cas de l'échelon 6,1. Nous expliquons cette différence importante par la non linéarité de la colonne. Dans le premier cas, l'entrée varie entre 7 et 9 l/h et la sortie entre 78,5 % et 81,5 % environ ; dans le second cas, l'entrée évolue entre 8 et 9 l/h et la sortie entre 80 et 86 %.

Nous pouvons conclure ce chapitre en disant que nous avons obtenu un modèle discret de la machine à papier en un point de fonctionnement, par chaque méthode. Le modèle du maximum de vraisemblance est meilleur que le modèle continu obtenu sur les mêmes données, au sens de l'erreur quadratique moyenne ; le modèle des moindres carrés généralisés est équivalent au modèle continu, le modèle de la matrice instrumentale moins bon.

De même nous avons obtenu un modèle discret de la colonne à distiller en un point de fonctionnement, par les trois méthodes, quand l'entrée est une séquence binaire. Le modèle le plus simple et le plus performant est celui du maximum de vraisemblance, le plus compliqué celui de la matrice instrumentale. Nous avons pu montrer sur la réponse indicielle que l'on peut facilement obtenir un modèle plus simple et assez performant quand l'entrée est un échelon.

Nous n'avons pas la prétention d'avoir identifié complètement ces deux systèmes. Nous avons pu montrer sur la colonne à distiller que la structure et les paramètres du modèle dépendent de l'entrée et du point de fonctionnement choisi. Ce chapitre n'avait d'autre but que de vérifier que toutes les affirmations que nous avons avancées dans les chapitres précédents coïncidaient effectivement avec le fonctionnement d'une unité réelle. Nous avons pu constater que la méthode du maximum de vraisemblance donne toujours de meilleurs résultats ; les méthodes des moindres carrés généralisés et de la matrice instrumentale sont plus comparables. Toutefois avec cette dernière la caractérisation est difficile et on est souvent conduit de ce fait à choisir un modèle plus complexe que nécessaire.

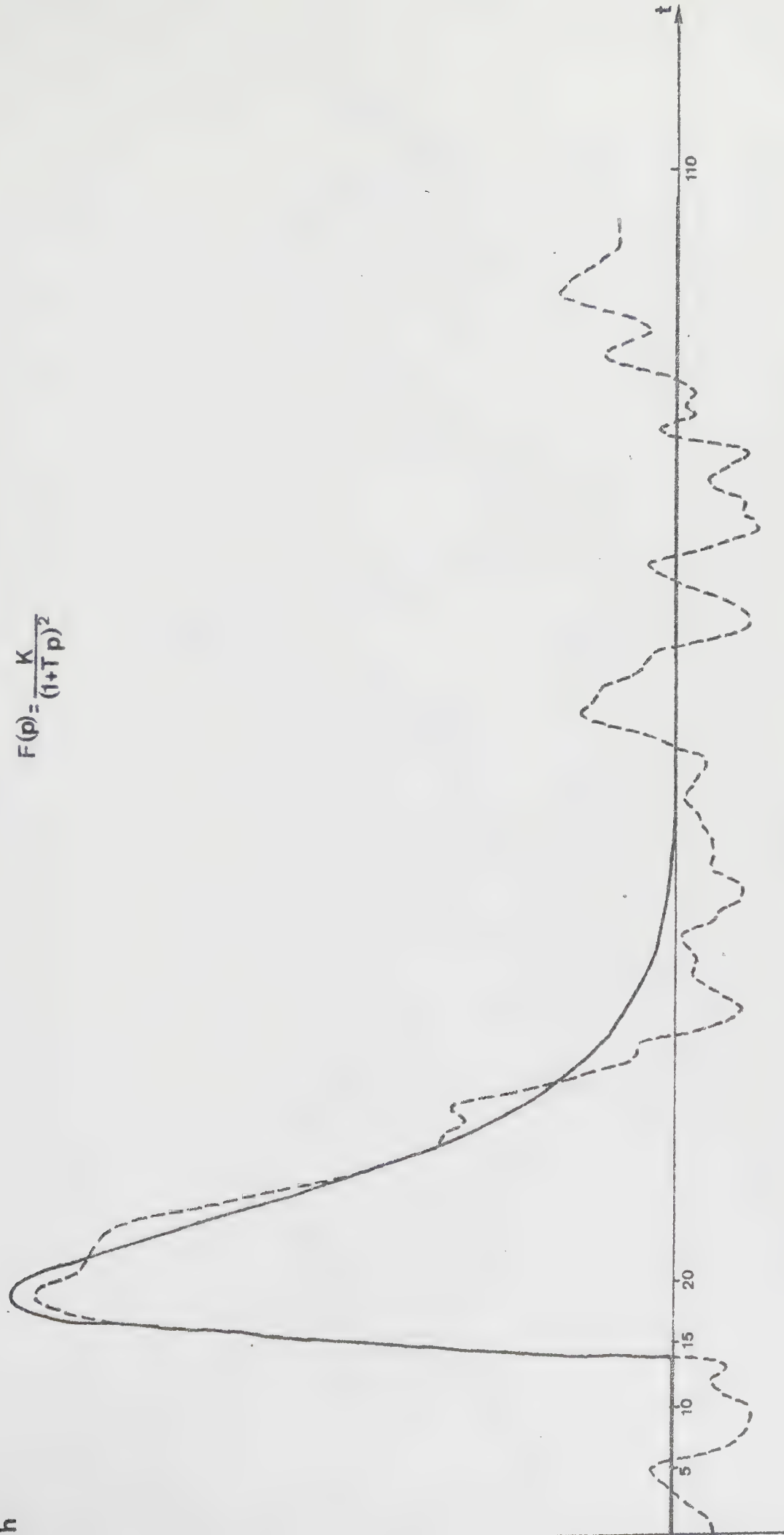
Nous avons surtout voulu montrer que l'identification d'un système n'était pas résolue sous prétexte qu'on avait programmé correctement une méthode, aussi performante soit-elle. Un bon programme de traitement des données est évidemment une condition nécessaire mais non suffisante pour identifier un système. Il faut faire de nombreuses considérations empiriques, s'appuyer sur l'expérience que l'on a du fonctionnement du système, si l'on veut aboutir. Nous pensons avoir prouvé d'autre part qu'il est indispensable de savoir à quoi va servir le modèle, dans quelles conditions fonctionnera le système, ..., pour connaître le degré de précision et le degré de complexité nécessaires. On ne cherche pas un modèle pour avoir une représentation mathématique du système, mais pour l'utiliser par ailleurs. Il ne faut jamais perdre de vue ce but final lors même de l'identification.



courbe 9.1: séquence binaire pseudo-aléatoire ($L=127$)

——— réponse impulsionnelle du modèle
 - - - - - réponse impulsionnelle du procédé

$$F(p) = \frac{K}{(1+Tp)^2}$$

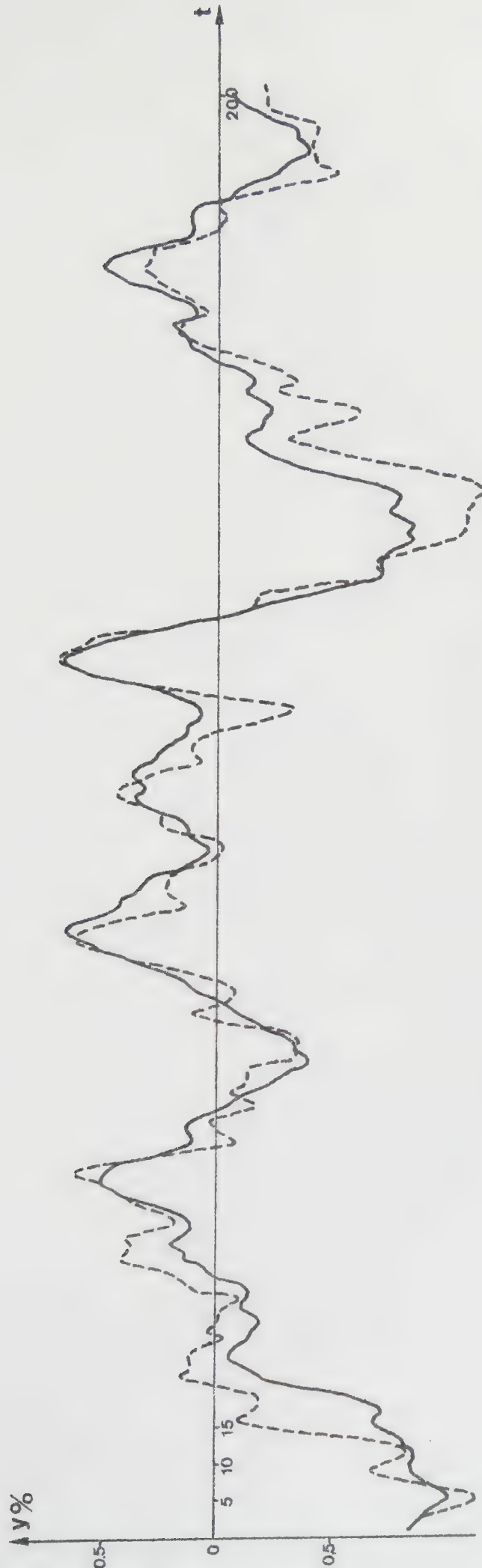


Courbe 9.2 Machine à papier : modèle continu

— Sortie modèle

- - - Sortie procédé

$J = 0,062$



Courbe 9.3. Machine à papier : modèle du maximum de vraisemblance

—— Sortie modèle
----- Sortie procédé
 $J = 0,094$

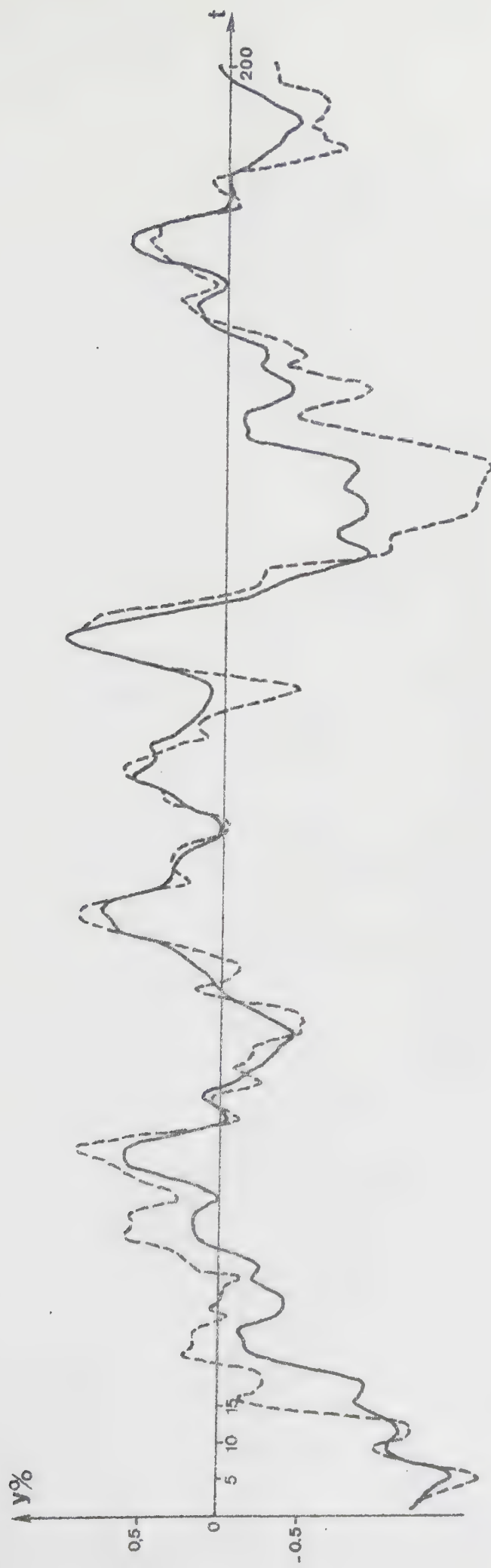


Courbe 9.4. Machine à papier : modèle de la matrice instrumentale

— Sortie modèle

- - - Sortie procédé

$J=0,082$



Courbe 9.5. Machine à papier : modèle des moindres carrés généralisés

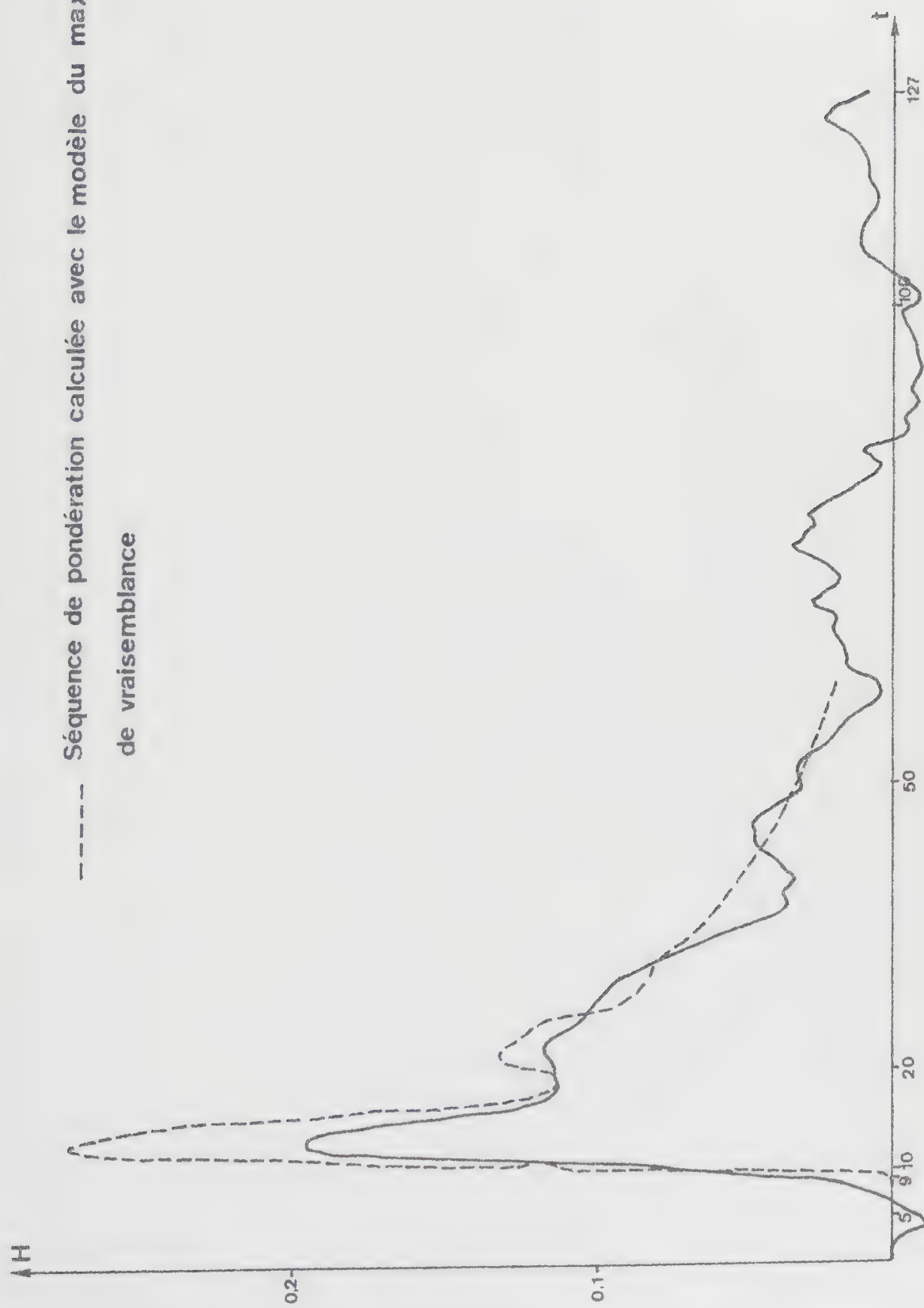
—— Sortie modèle
----- Sortie procédé
 $J=0,082$



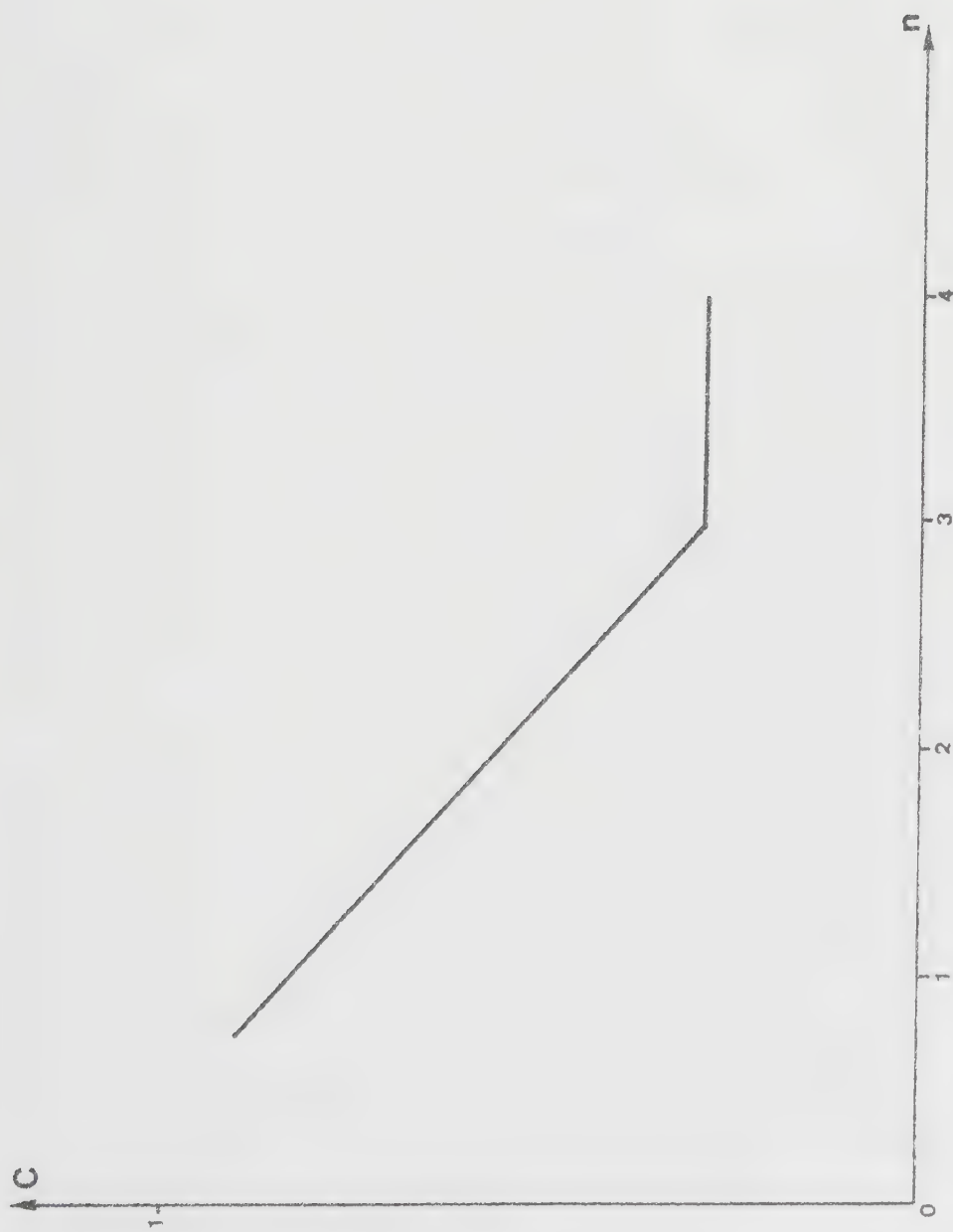
Courbe 9.6 : Machine à papier : discrétisation du modèle continu obtenu sur la réponse impulsionnelle

_____ Séquence de pondération calculée par intercorrélation avec une SB.P.A.

----- Séquence de pondération calculée avec le modèle du maximum
de vraisemblance

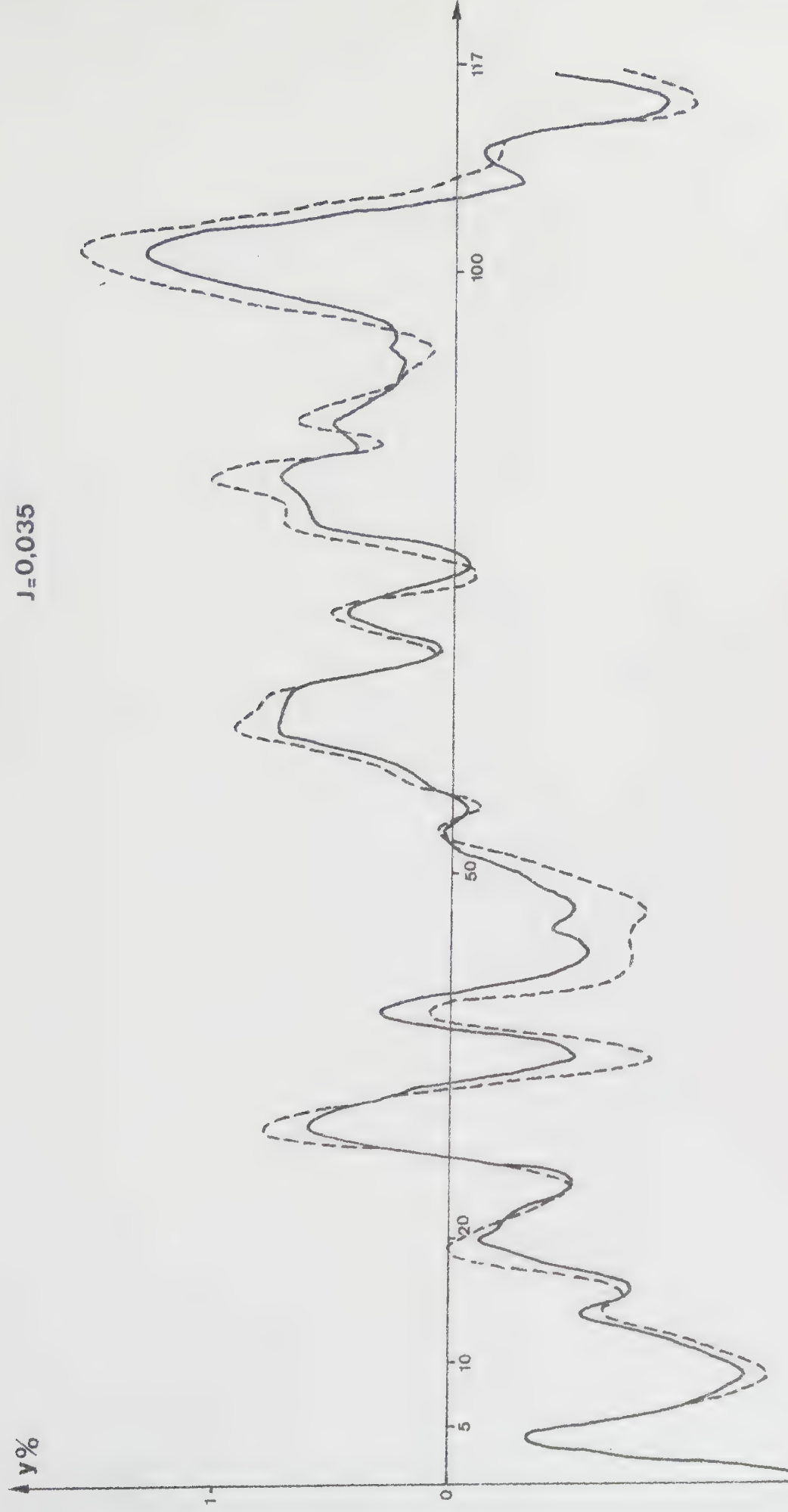


Courbe 9.7 : Séquence de pondération de la colonne à distiller



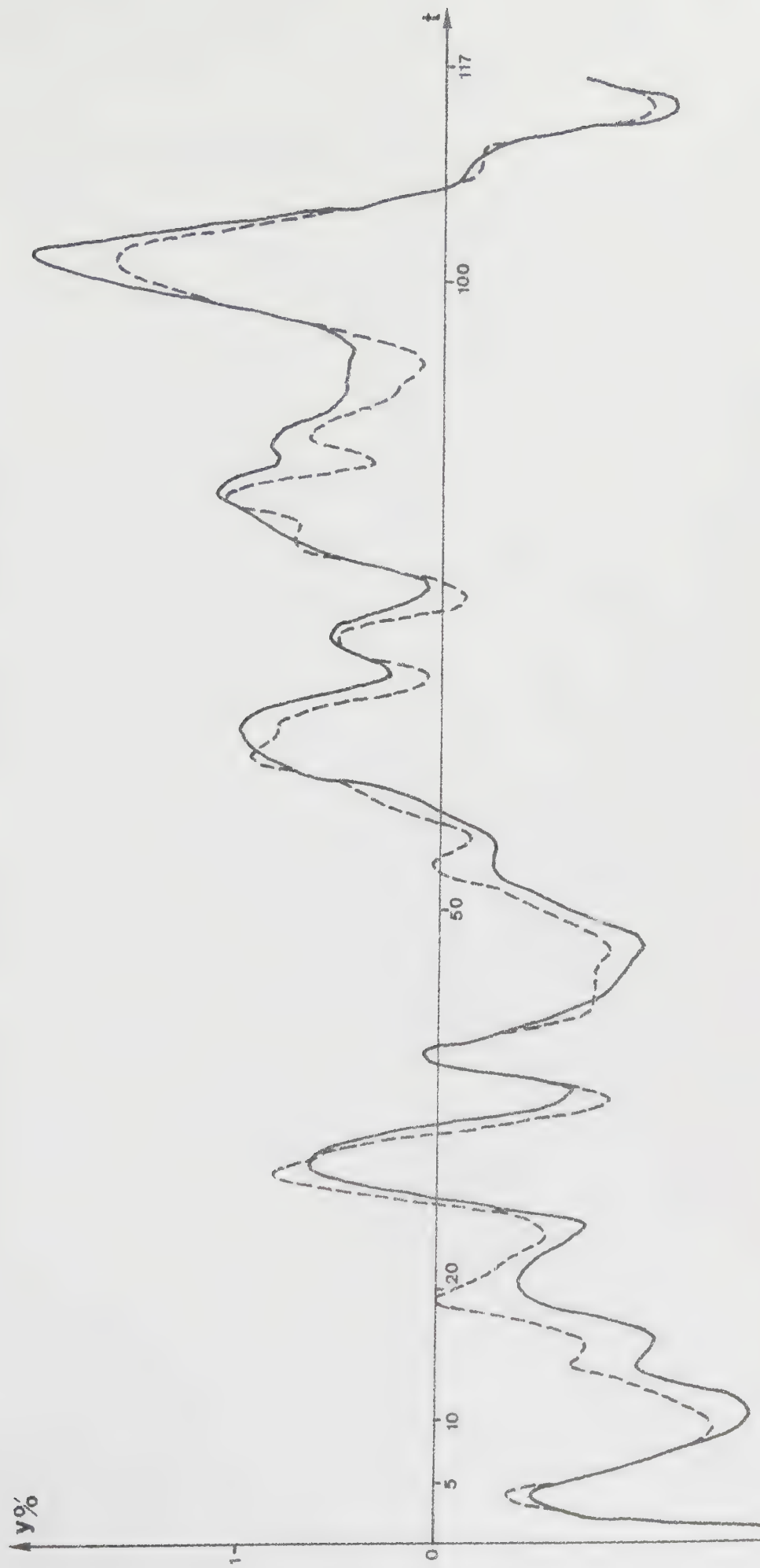
Courbe 9.8 : Courbe de caractérisation de la colonne à distiller pilote (méthode des moindres carrés généralisés)

— Sortie modèle
- - - Sortie procédé
 $J=0,035$



Courbe 9.9 Colonne à distiller : modèle des moindres carrés généralisés

— Sortie modèle
 - - - Sortie procédé
 J 0,055

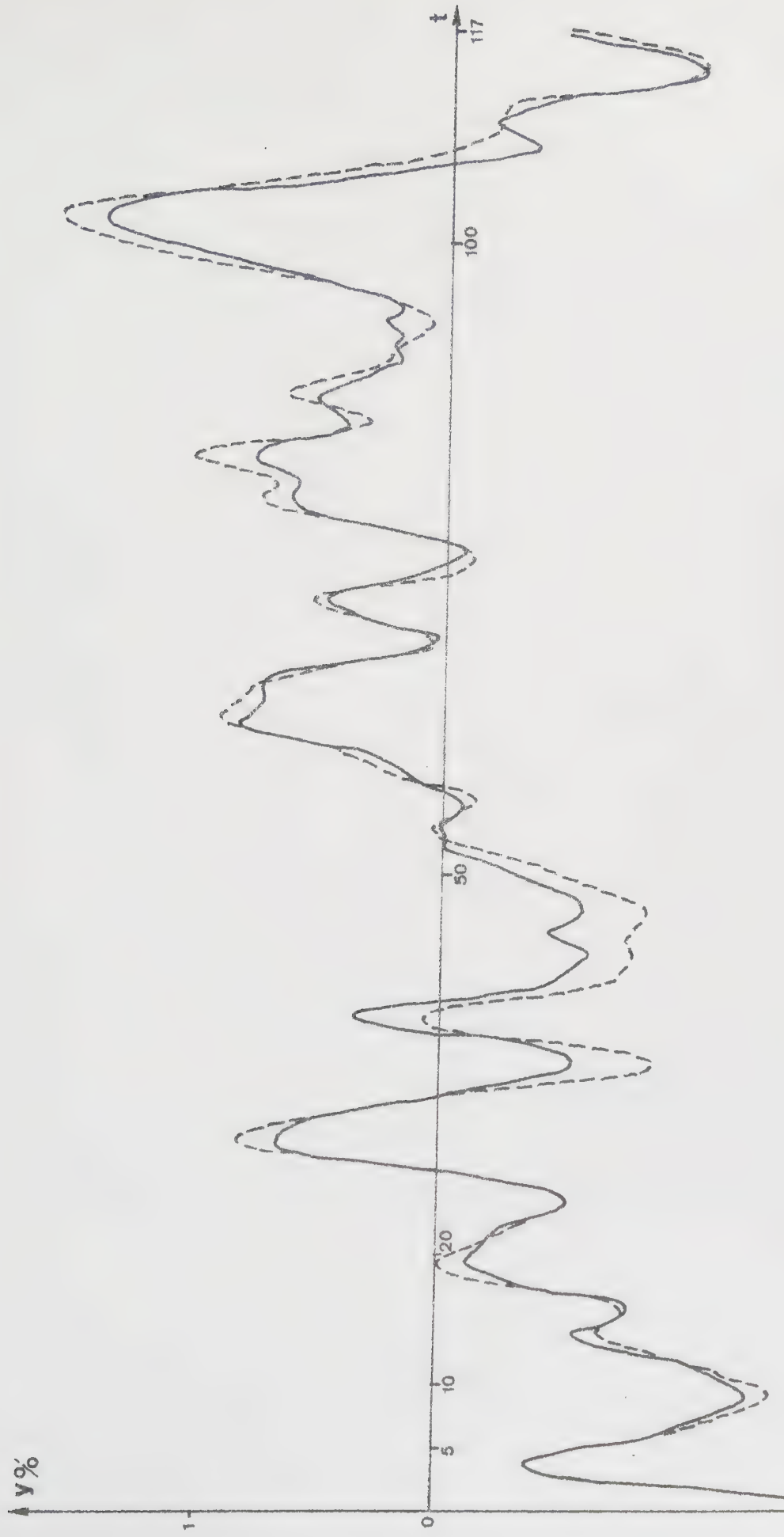


Courbe 9.10 : Colonne à distiller : modèle de la matrice instrumentale

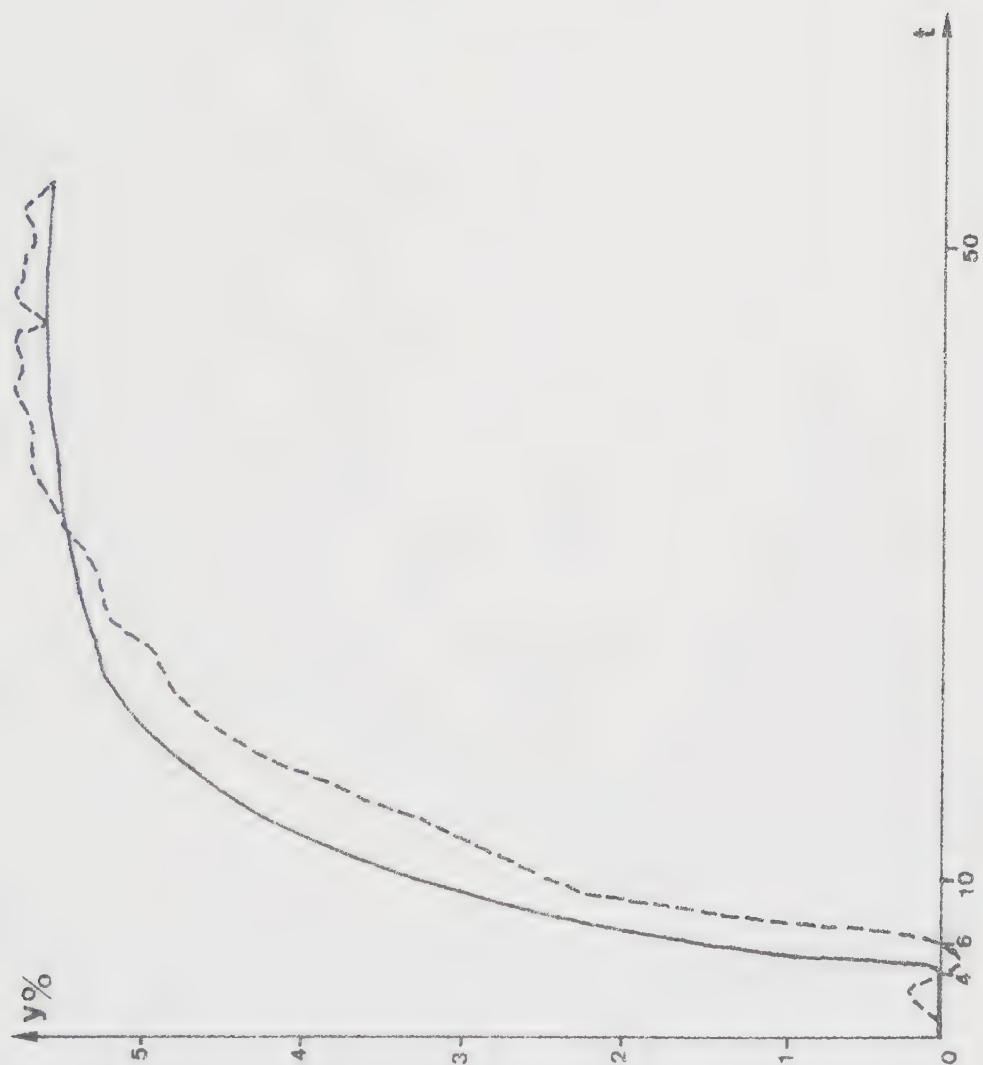
— Sortie modèle

- - - Sortie procédé

$J = 0,030$



Courbe 9.11: Colonne à distiller : modèle du maximum de vraisemblance

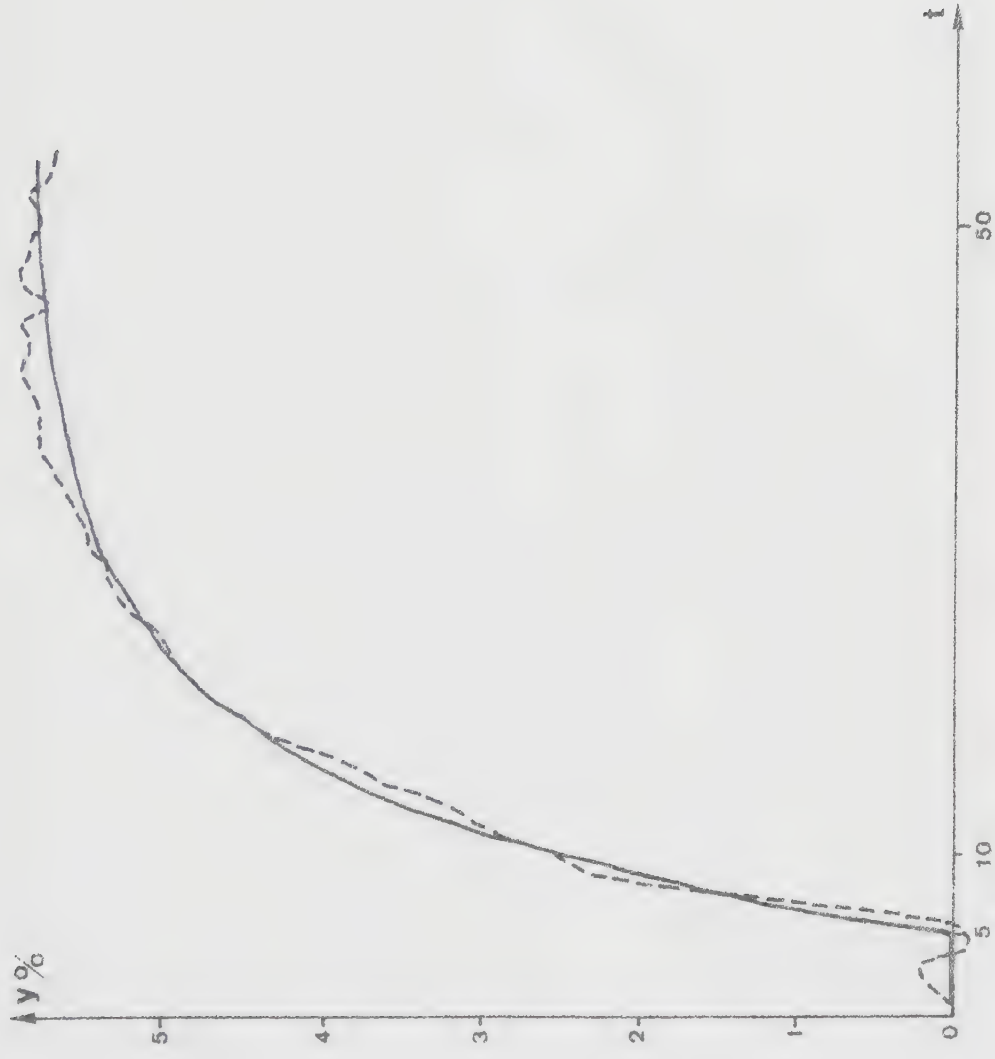


Courbe 9.12 Colonne à distiller : Mauvaise identification du retard

— Sortie modèle (1^{er} ordre)

- - - Sortie procédé

$J = 0.016$

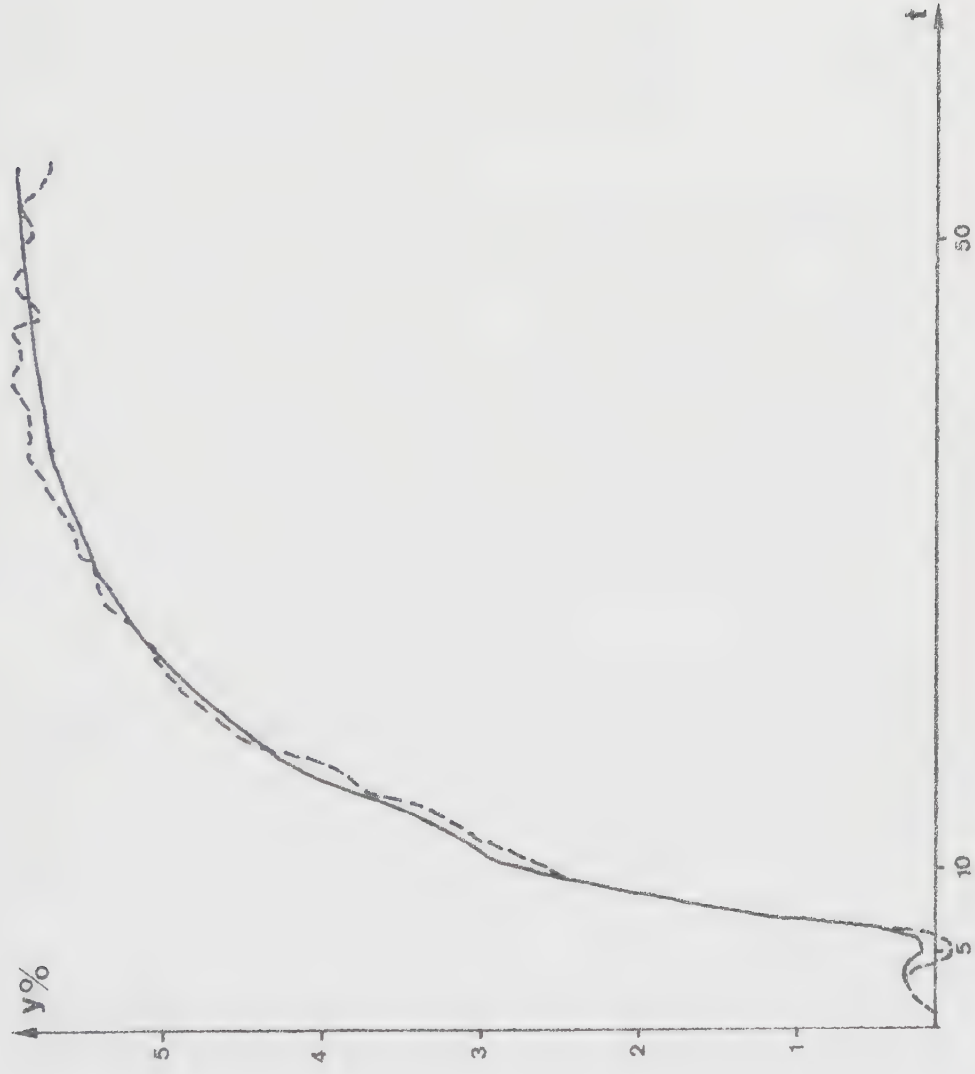


Courbe 9.13 Colonne à distiller : Identification de la réponse indiciale

—— Sortie modèle (3^{ème} ordre)

----- Sortie procédé

$J = 0,011$



Courbe 9.14 Colonne à distiller : Identification de la réponse indicible

C O N C L U S I O N

Il nous faut maintenant dresser le bilan de nos comparaisons. L'étude développée dans les chapitres précédents nous a permis de dégager quelques résultats :

La méthode des MOINDRES CARRES GENERALISES n'a pas de support théorique très rigoureux, mais fournit toujours une bonne estimation des paramètres. Il faut à notre avis employer systématiquement cette méthode de préférence aux moindres carrés simples : en effet, la procédure d'estimation du filtre est très simple, surtout si on le suppose du premier ordre et si on utilise un algorithme itératif. Signalons que, de plus, cette méthode fournit, outre les paramètres du système, ceux d'un modèle de générateur de bruit. (Chapitre 3).

La méthode de la MATRICE INSTRUMENTALE possède un support théorique intéressant et est de mise en oeuvre très facile. Nous avons montré qu'il faut soigner l'étude du retard qui permet de construire la matrice instrumentale si l'on veut obtenir de bons résultats. (Chapitre 4).

La méthode du MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE possède un support théorique très riche ; on peut, en particulier, démontrer que, dans le cas de bruit gaussien, elle fournit l'estimateur à variance minimale. Nous avons mis en évidence le fait que, bien qu'indispensable en théorie, l'hypothèse de bruit gaussien pouvait ne pas être respectée en pratique. La méthode fournit un modèle de générateur de bruit. Par contre, sa mise en oeuvre est difficile, et le coût de l'identification élevé (Chapitre 5).

La comparaison des méthodes (chapitres 6 et 7) montre que les MOINDRES CARRES GENERALISES et la MATRICE INSTRUMENTALE ont des résultats pratiquement identiques et que

LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE fournit toujours de meilleurs résultats. En particulier, quand l'entrée est un échelon - entrée, comme nous l'avons vu, très mal adaptée au modèle choisi - seule cette dernière méthode est capable de détecter toute l'information contenue dans les mesures. Nous avons pu constater que la méthode de la MATRICE INSTRUMENTALE qui, contrairement aux autres, ne fournit pas la précision de l'estimation et ne minimise aucun critère (on est seulement assuré de la convergence en probabilité de l'estimateur vers les paramètres quand le nombre de données est infini) permet moins aisément que les deux autres méthodes de choisir la structure du modèle quand on ignore celle-ci a priori. Elle est donc d'un emploi moins agréable en temps différé. Par contre, une étude rapide des algorithmes déduits de ces méthodes pour une identification en temps réel (chapitre 8) nous a montré, outre les liens étroits avec d'autres méthodes comme le filtrage linéaire ou la minimisation d'une distance de structure, que la méthode de LA MATRICE INSTRUMENTALE est la plus adaptée au temps réel.

Nous affirmons dans l'Introduction que l'identification n'est pas un problème mathématique, mais un problème de physicien. Il faut toujours relier les modèles obtenus à la réalité physique - c'est pourquoi nous avons essayé de garder constamment à l'esprit au cours de notre travail ce que représentaient les variables trop souvent englobées sous le nom de 'bruit'. Il faut réaliser au mieux le compromis précision-simplicité. Il ne faut jamais perdre de vue le but du modèle - c'est généralement la commande du système : de façon très rigoureuse donc, on ne devrait juger la qualité du modèle qu'en fonction de la qualité de la commande qu'il a servi à déterminer. Ces problèmes sont illustrés dans le 9ème chapitre, où nous avons montré la difficulté de l'identification de procédés industriels dont on ignore totalement la structure. La caractérisation de ces systèmes est très délicate. On aura pu se convaincre, bien que la tendance actuelle soit plutôt à la mise au point d'algorithmes en temps réel, qu'une étude

préalable très sérieuse en temps différé est absolument indispensable. Le but de notre travail n'était pas de décider si une des méthodes est toujours préférable aux autres, mais plutôt de donner tous les éléments possibles pour permettre à l'utilisateur un choix réfléchi en fonction de son problème particulier et des moyens dont il dispose ; cependant nous nous permettrons de suggérer le fait qu'il ne faut pas, pour une étude en temps différé, hésiter devant la complexité d'une méthode ou devant son prix, et qu'il faut essayer d'apprendre le maximum sur le système, même si on n'a pas l'intention d'utiliser directement toutes les connaissances acquises.

R E F E R E N C E S

- (1) D.J. WILDE
Méthodes de recherche d'un optimum.
Dunod 1966.

- (2) K.J. ÅSTRÖM, P. EYKOFF
System Identification, a survey
Symposium I.F.A.C. Prague, 1970.

- (3) I.D. LANDAU
Sur la théorie et les applications des systèmes adaptatifs
avec modèle.
Cours enseigné à la Section Spéciale d'Automatique de
l'Institut National Polytechnique de Grenoble, avril 1970.

- (4) H.Y. HUANG, A.V. LEVY
Numerical experiments on quadratically convergent algo-
rithms for function minimization.
Journal of optimisation theory and applications. Vol. 6,
n° 3, 1970, pp. 269-282.

- (5) J. RICHalet, A. RAULT, R. POULIQUEN
Identification des processus par la méthode du modèle.
Gordon & Breach, Théorie des Systèmes, Vol. 4, 1972.

- (6) A. BARRAULT
Contribution à l'identification des séquences de pondéra-
tion des systèmes dynamiques.
Thèse de docteur-ingénieur, Ecole Nationale Supérieure de
Mécanique de Nantes, juillet 1971.

- (7) E. IRVING
Identification des systèmes.
Notes I, II et III.
Direction des études et recherches E.D.F. 1970.

(8) M. FOND

Contribution à la synthèse de la commande dynamique de systèmes multidimensionnels.

Thèse de docteur-ingénieur. Laboratoire d'Automatique de Grenoble. Juillet 1971.

(9) R. BOUDAREL, J. DELMAS, P. GUICHET

Commande optimale des processus.

Tome I : Concepts fondamentaux de l'Automatique.

Dunod 1967.

(10) J. DURBIN

Estimation of parameters in time-series regression models.

J. Roy. Stat. Soc - Series B, Vol. 22, n° 1, 1960.

(11) K.J. ÅSTRÖM

Lectures on the identification problem : the least-square method.

Report 6806. Lund Institute of Technology. Division of Automatic Control. Sept. 1968.

(12) I. GUSTAVSSON

Parametric identification of multiple input, single output linear dynamic systems.

Report 6907. Lund Institute of Technology. Division of Automatic Control. July 1969.

(13) P.A.N. BRIGGS, D.W. CLARKE, P.H. HAMMOND

An introduction to statistical identification methods in control systems.

Note Interne du National Physical Laboratory. Autonomics Division. Décembre 1966.

(14) B.T. FANG

A more direct proof of the minimum variance property of the linear weighted least-squares estimator.

I.E.E. Transactions on Automatic Control. Vol. A.C. 14, n° 6, Décembre 1969.

- (15) Y. SUSUKI, K. FUJII, Y. UCHIDA
Fundamental study for on line identification of power plant by using control computer.
I.F.A.C./I.F.I.P. Conférence on digital computer : Applications to process control. Helsinki, 2/5 juin 1971.
- (16) K. STEIGLITZ, L.E. Mc BRIDE
A technique for the identification of linear systems.
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, Vol. AC 10, n° 4, Octobre 1965.
- (17) D.W. CLARKE
Generalized-least-squares estimation of the parameters of a dynamic model.
Note interne. National Physical Laboratory - Autonomics Division. Novembre 1966.
- (18) G. BANON
Etude d'algorithmes d'estimation des paramètres pour l'identification adaptative en temps réel des processus linéaires perturbés par un bruit corrélé.
Thèse de docteur-Ingénieur. Université de Toulouse, Janvier 1971.
- (19) K.Y. WONG, E. POLAK
Identification of linear discrete-time systems using the Instrumental variable method.
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control. Vol. AC-12, n° 6, Décembre 1967.
- (20) K.J. ÅSTRÖM, T. BOHLIN, S. WENSMARK
Automatic construction of linear stochastic dynamic models for stationary industrial processes with random disturbances using normal operating records.
Report T.P. 18.150. IBM Nordic Laboratory - Sweden, Juin 1965

- (21) K.J. ÅSTRÖM, T. BOHLIN
Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records.
Symposium IFAC. Teddington (Angl.) 1965.
- (22) A. MENENDEZ MARTINEZ
Identification de la réponse impulsionnelle d'un système par intercorrélation au moyen de séquences binaires pseudo-aléatoires.
Thèse de docteur-Ingénieur. Laboratoire d'Automatique de Grenoble. Juin 1970.
- (23) J.A. CHANG
Identification of multivariable control systems using ternary pseudo-random sequences.
Symposium I.F.A.C. Dusseldorf. 1968.
- (24) J.B. BERN
Identification en temps réel d'une colonne à distiller pilote.
Thèse de docteur-Ingénieur. Laboratoire d'Automatique de Grenoble. Février 1972.
- (25) J.CI. RADIX
Introduction au filtrage numérique
Eyrolles ed. 1970.
- (26) A.H. JAZWINSKI
Stochastic processes and filtering theory.
Mathematics in Science and Engineering. Vol. 64. Academic Press. 1970.
- (27) J. RICHALET, B. GIMONET
Identification des systèmes discrets linéaires monovariab-
les (multivariables) par minimisation d'une distance de
structure.
Electronic Letters. 29 nov. 1968. Vol. 4, n° 24

(28) B. LEBEAU

Commande par calculateur numérique d'une unité pilote de fabrication de papier.

Thèse de docteur-ingénieur. Faculté des Sciences de Grenoble.

(28) B. LEBEAU

Commande par calculateur numérique d'une unité pilote de fabrication de papier.

Thèse de docteur-ingénieur. Faculté des Sciences de Grenoble.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse.

VU, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université Scientifique et
Médicale de Grenoble.

